

# Corrigé du sujet de concours des technologues session 2015

## Partie A

*A.1 En tenant compte de la fréquence d'échantillonnage et de durée de fermeture des interrupteurs, calculer le nombre de voies temporelles NVT.*

-----

La fréquence d'échantillonnage  $f_e = 16\text{kHz}$  et la durée de fermeture des interrupteurs égale à

976ns. Donc 
$$NVT = \frac{1}{\frac{16 \cdot 10^3}{976 \cdot 10^{-9}}} = 64 \text{ voies}$$

-----

*A.2 Justifier le choix d'une fréquence d'échantillonnage de 16 KHz compte tenu des caractéristiques fréquentielles du signal transmis (fréquence vocale de 300 à 3400 Hz).*

-----

La largeur de bande d'un signal vocal est de 3400hz ; la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à  $2 \times 3400\text{hz}$ . Le choix d'une fréquence d'échantillonnage de 16kHz peut se traduire par la même occupation spectrale que l'échantillonnage à 16kHz d'un signal d'une largeur de bande de 8kHz.

-----

*A.3 Calculer la bande passante du bus PAM.*

-----

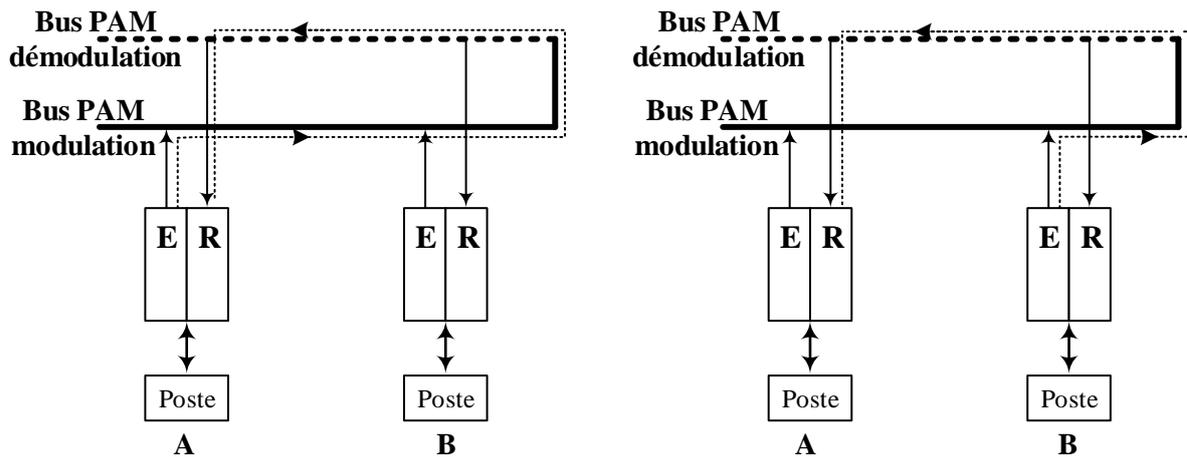
$$BP = NVT \times \frac{f_e}{2} = 64 \times 8 = 512\text{kHz}$$

-----

*A.4 Dans les cas d'une communication bidirectionnelle entre deux postes internes, donner la séquence d'ouverture et de fermeture des interrupteurs. Quel est le nombre de voies temporelles nécessaire à cette communication ?*

-----

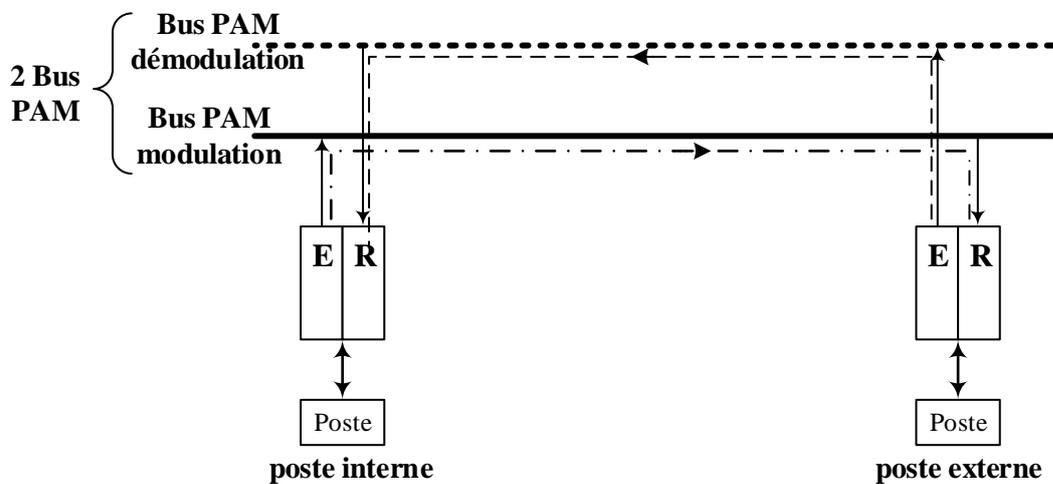
Tous les équipements émetteurs sont connectables à l'un des bus PAM, les équipements récepteurs sont reliés à l'autre bus.



Il est nécessaire de prévoir deux voies temporelles à chaque communication.

*A.5 Même questions dans le cas d'une communication bidirectionnelle entre un poste interne et un poste externe.*

Les connexions aux bus PAM étant croisés, les échanges peuvent se faire simultanément par chacun des bus, non reliés entre eux, n'utilisant ainsi qu'une seule voie temporelle.



*A.6 Quel est le nombre maximum de communications bidirectionnelles que peut assurer cet autocommutateur ?*

Le maximum de communications sera atteint avec :

- 32 communications avec l'extérieur utilisant 32 VT.
- 16 communications internes utilisant 32 VT

Soit un nombre maximal de **48** communications.

---

*A.7 Donner le mode de communication bidirectionnelle (duplex intégral, semi-duplex, simplex) dans différentes communications (entre postes internes ou entre un poste interne et un poste externe).*

---

Entre postes internes : c'est le semi-duplex

Entre poste interne – poste externe : c'est le duplex intégral

---

## Partie B :

### B.1.1 Etude dans le domaine fréquentiel

*B.1.1.1 Exprimer les coefficients de la série de Fourier et les amplitudes du fondamental et des harmoniques de  $imp(t)$ .*

---

$Imp(t)$  est paire  $\rightarrow b_n = 0$

$$Imp(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_e t) \quad \text{avec } \omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} Imp(t) \cdot dt = \frac{2}{T_e} \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\delta} \cdot dt = \frac{1}{T_e} = 16 \cdot 10^3$$

$$a_n = \frac{2}{T_e} \int_0^{T_e} Imp(t) \cdot \cos(n\omega_e t) \cdot dt = \frac{4}{T_e} \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{\delta} \cos(n\omega_e t) \cdot dt = \frac{4}{n\omega_e \delta T_e} \sin(n\omega_e \frac{\delta}{2})$$

$$a_n = \frac{4}{n\omega_e \delta T_e} \sin(n\omega_e \frac{\delta}{2}) = \frac{2}{n\pi\delta} \sin(n\pi \frac{\delta}{T_e})$$

---

*B.1.1.2 Calculer numériquement les amplitudes du fondamental et des deux premiers harmoniques.*

---

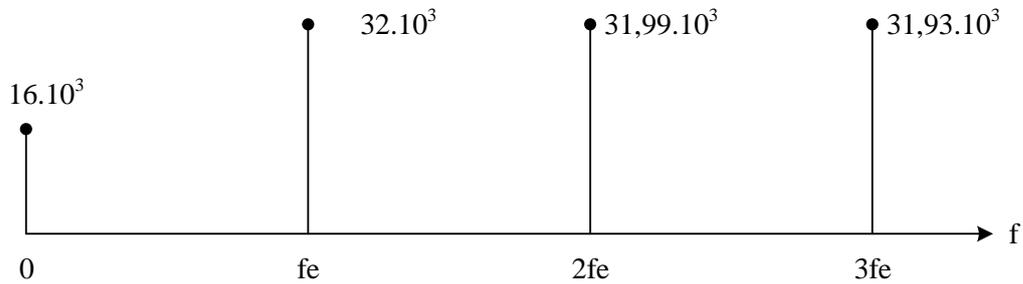
$$a_1 = \frac{2}{\pi\delta} \sin(\pi \frac{\delta}{T_e}) = 32 \cdot 10^3$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi\delta} \sin(2\pi \frac{\delta}{T_e}) = 31,99 \cdot 10^3$$

$$a_3 = \frac{2}{3\pi\delta} \sin(3\pi \frac{\delta}{T_e}) = 31,93 \cdot 10^3$$

---

**B.1.1.3 Donner graphiquement l'allure du spectre d'amplitude.**



**B.1.1.4 Exprimer  $V_{ee}(t) = V_e(t).Imp(t)$**

$$V_{ee}(t) = a_0 V_E \cdot \sin(\omega t) + V_E \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_e t) \cdot \sin(\omega t)$$

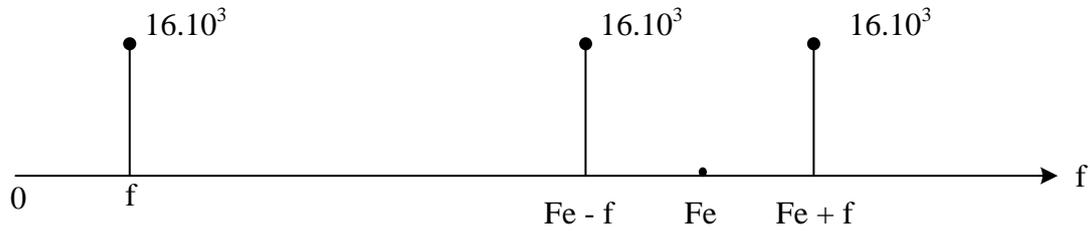
$$V_{ee}(t) = a_0 V_E \cdot \sin(\omega t) + \frac{V_E}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos(n\omega_e - \omega)t - \sin(n\omega_e - \omega t))$$

$$V_{ee}(t) = \frac{V_E}{T_e} \cdot \sin(\omega t) + V_E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi\delta} \sin(n\pi \frac{\delta}{T_e}) (\cos(n\omega_e - \omega)t - \sin(n\omega_e - \omega t))$$

**B.1.1.5 Calculer numériquement les amplitudes et les fréquences des trois premières raies du spectre d'amplitude de  $V_{ee}(t)$ .**

	Amplitude	Fréquence
Fondamentale	$V_{ee1} = \frac{V_E}{T_e} = 16.10^3$	F = 3,200KHz
Harmonique1	$V_{eeh1} = \frac{a_1 V_E}{2} = 16.10^3$	Fe-F = 12,800KHz
Harmonique2	$V_{eeh1} = \frac{a_1 V_E}{2} = 16.10^3$	Fe+F = 19,200KHz

*B.1.1.6 Donner graphiquement l'allure du spectre d'amplitude de  $V_{ee}(t)$ .*

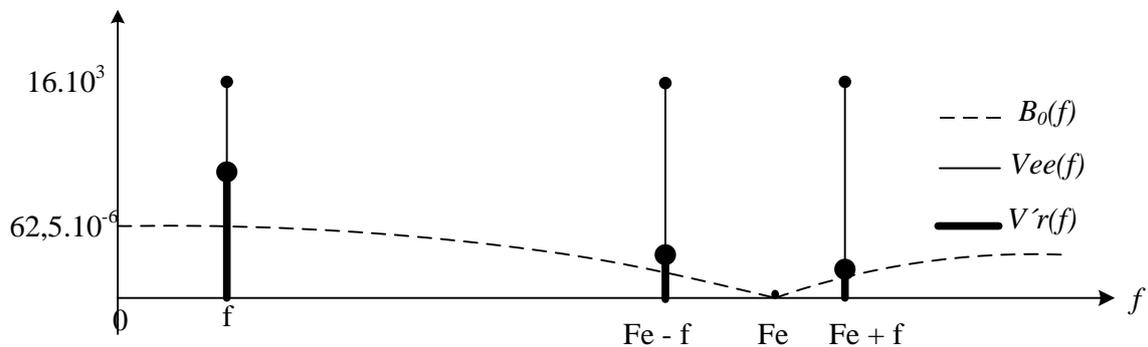


*B.1.1.7 Donner graphiquement l'allure du spectre d'amplitude du signal échantillonné bloqué  $V'r(t)$  et calculer numériquement les amplitudes des trois premières raies.*

$$|B_0(f)| = T_e \left| \frac{\sin(\pi f T_e)}{\pi f T_e} \right|$$

Le spectre du signal échantillonné bloqué est le produit du spectre du bloquer d'ordre 0 par le spectre du signal échantillonné.

$$V'r(f) = B_0(f) \cdot V_{ee}(f)$$



	Amplitude $V'r$	Fréquence
Fondamentale	$0,925V_E = 0,935V$	$F = 3,200KHz$
Harmonique1	$0,233V_E = 0,233V$	$Fe-F = 12,800KHz$
Harmonique2	$0,156V_E = 0,156V$	$Fe+F = 19,200KHz$

## B.1.2 Etude dans le domaine temporel

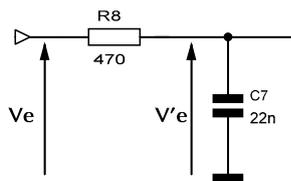
### B.1.2.1 Déterminer la valeur de $R'$ .

$$R' = R_{BM} \parallel R_{BD} \parallel R_{FPM} \parallel R_{FPD} = 65\Omega$$

### B.1.2.2 Montrer que durant l'échantillonnage, on peut se limiter à la structure schématisé dans la figure 14.

Durant la phase d'échantillonnage l'impédance  $Z_{C4} + (R_5 \parallel Z_{E1}) \gg R'$

### B.1.2.3 Montrer que $V_e \cong V'e$ lorsque les interrupteurs sont ouverts



$$G(p) = \frac{V'e(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + R_8 C_7 p} \quad \text{avec } R_8 C_7 = 10^{-5}$$

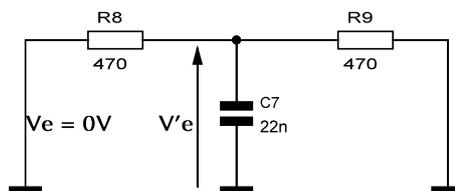
La fréquence de coupure  $f_c = \frac{1}{2\pi R_8 C_7} \approx 16\text{Khz}$  et  $G(0) = 1$ . les

fréquences vocales (300 à 3400Hz) sont largement incluses dans la bande passante d'où  $V_e \cong V'e$

### B.1.2.4 Etudier la décharge de $C7$ pendant l'échantillonnage si $C3$ était court-circuité. En déduire que l'on peut considérer la structure comme équivalente au schéma donné par la figure 15.

On a montré que lorsque les interrupteurs sont ouverts  $V_e \cong V'e$ . Il suffit de montrer que le condensateur se décharge lentement dans la phase d'échantillonnage pour confirmer l'égalité de  $V_e$  et  $V'e$ .

On va se placer dans le pire des cas :  $C3$  est court-circuité et  $V_e = 0V$ . Le condensateur est initialement chargé à  $V_0$ .

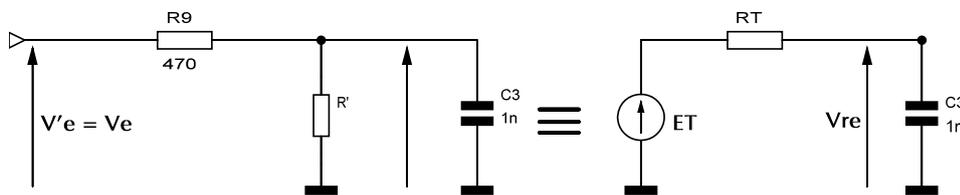


$$V'e = -\frac{R_8}{2}i = -C_7R \frac{dV'e}{dt} \text{ avec } R = \frac{R_8}{2} \rightarrow V'e = V_0 e^{-\frac{t}{RC_7}} = V_0 e^{-\frac{t}{5 \cdot 10^{-6}}}$$

à  $t = 0 \rightarrow V'e = V_0$

À la fin de la phase d'échantillonnage  $V'e = V_0 e^{-\frac{0,488}{5}} \approx 0,9V_0$ . Le condensateur se décharge de moins de 10%. Ce qui confirme le schéma de la figure 15, puisque  $V_e \cong V'e$ .

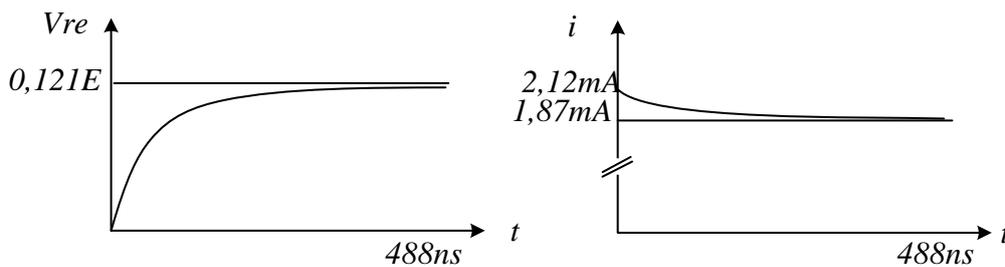
**B.1.2.5 Donner les expressions de  $V_{re}$  et  $i$  (courant dans  $R_9$ ) pendant la phase d'échantillonnage et tracer les courbes correspondantes.**



$$E_T = \frac{R'}{R' + R_9} E \quad \text{et} \quad R_T = \frac{R' R_9}{R' + R_9}$$

$$E_T = R_T i + V_{re} = C_3 R_T \frac{dV_{re}}{dt} + V_{re} \rightarrow V_{re} = E_T (1 - e^{-\frac{t}{R_T C_3}}) = 0,121E (1 - e^{-\frac{t}{57 \cdot 10^{-9}}})$$

$$\text{Le courant } i = \frac{V_{re}}{R'} + C_3 \frac{dV_{re}}{dt} \rightarrow i = \frac{E}{R' + R_9} (1 + \frac{R'}{R_9} e^{-\frac{t}{R_T C_3}}) = 1,87 \cdot 10^{-3} E (1 - 0,138 e^{-\frac{t}{57 \cdot 10^{-9}}})$$



**B.1.2.6 Vérifier que le condensateur  $C_3$  se charge complètement pendant la phase d'échantillonnage.**

Le condensateur se charge avec une constante de temps de 57ns, il se charge à 95% à  $3 \times 57\text{ns} = 171\text{ns} < 488\text{ns}$ .

**B.1.2.7 L'amplificateur non inverseur est utilisé pour compenser l'atténuation due à l'échantillonnage (Erreur ! Source du renvoi introuvable).**

**B.1.2.7.1 Calculer alors la valeur du gain de l'amplificateur.**

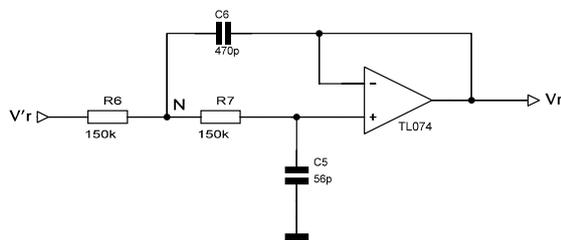
Le gain de l'amplificateur  $G = \frac{1}{0,121} = 8,26$

**B.1.2.7.2 Déterminer la valeur de R4.**

$$R_4 = \frac{R_{10}}{G-1} = \frac{82}{7,26} = 11,2k\Omega$$

**B.1.2.8 Donner la fonction de transfert en l'exprimant sous la forme canonique :**

$$\frac{Vr(p)}{V'r(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$



soit  $R_6 = R_7 = R$

$$\frac{V'r - V_N}{R} + \frac{Vr - V_N}{R} + (Vr - V_N)C_6 p = 0 \quad (1) ; Vr = V_N \frac{1}{1 + RC_5 p} \rightarrow V_N = (1 + RC_5 p) Vr \quad (2)$$

En reporte l'expression de la tension  $V_N$  dans (1) :

$$\boxed{\frac{Vr(p)}{V'r(p)} = \frac{1}{1 + 2RC_5 p + R^2 C_5 C_6 p^2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_5 C_6}} \quad \text{et} \quad m = \sqrt{\frac{C_5}{C_6}}$$

**B.1.2.9 Donner les valeurs numériques de m et  $\omega_0$ .**

$$\omega_0 = 41092 \text{rd/s} \rightarrow f_0 = 6,54 \text{KHz} \quad \text{et} \quad m = 0,345$$

---

## Partie C :

### C.1.1 Calculer la fonction de transfert

$$H_1(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)}$$

$$\text{En posant } \omega_1 = \frac{1}{R_F \cdot C_F} \quad \text{et} \quad p = j\omega$$

---

C'est un intégrateur pur

$$H_1(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = -\frac{1}{R_F \cdot C_F p} = -\frac{\omega_1}{p}$$

---

$$\text{C.1.2 En déduire } H_2(p) = \frac{V_3(p)}{V_2(p)}$$

---

$$\text{Identique à } H_1(p) \text{ d'où } H_2(p) = \frac{V_3(p)}{V_2(p)} = -\frac{\omega_1}{p}$$

---

### C.1.3 Exprimer $V_e(p)$ en fonction de $V_1(p)$ , $V_2(p)$ et $V_3(p)$ , $R_0$ et $R$ .

---

Soit  $R = 10 \text{K}\Omega$

$$e^- = \frac{10V_1 + V_e + V_3}{12} \quad \text{et} \quad e^+ = \frac{R_0}{10R + R_0} V_2$$

$$\frac{10V_1 + V_e + V_3}{12} = \frac{R_0}{10R + R_0} V_2$$

$$V_e = \frac{12R_0 V_2}{10R + R_0} - 10V_1 - V_3$$

---

C.1.4 Montrer que l'expression  $H(p) = \frac{V_3(p)}{V_e(p)}$  peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{V_3(p)}{V_e(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$


---

$$H(p) = \frac{V_3(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + \frac{12R_0}{\omega_1(10R + R_0)} \cdot p + \frac{10p^2}{\omega_1^2}}$$


---

Exprimer  $m$ ,  $\omega_0$  et  $k$  en fonction de  $R$ ,  $R_0$  et  $\omega_1$ .

---

$$K = -1 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{\omega_1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}R_F C_F} \quad ; \quad m = \frac{6R_0}{\sqrt{10}(10R + R_0)}$$


---

C.1.5 Déterminer la valeur des composants  $R_F(R100)$  et  $R_0(R104)$  pour avoir  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et une fréquence de coupure  $f_c = 3,6\text{KHz}$  à  $-3\text{dB}$ .

---

$$R_0 = \frac{10R\sqrt{5}}{6 - \sqrt{5}} = 59,4\text{K}\Omega$$

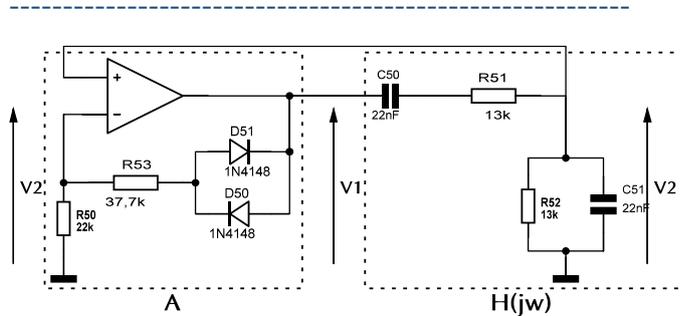
Pour  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$  pulsation de coupure  $\omega_c = \omega_0$

$$R_F = \frac{1}{\sqrt{10}\omega_0 C_F} = 13,98\text{k}\Omega$$


---

## Partie D :

*D.1 Monter que l'oscillateur pont de Wien peut être représenté par le schéma fonctionnel de la figure 22. Identifier alors les structures réalisant l'amplification  $A$  et  $H(j\omega)$ .*



*D.2 Exprimer  $V_2/V_1$  et en déduire les conditions d'oscillation.*

$$R = R_{51} = R_{52} \quad \text{et} \quad C = C_{50} = C_{51}$$

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2 + j3RC\omega}$$

Condition d'oscillation  $A \cdot H(j\omega) = 1 \rightarrow$  gain unité et phase nul (réel pure)

$$1 - R^2C^2\omega^2 = 0 \rightarrow \omega = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad A = 3$$

*D.3 Exprimer la fonction de transfert  $V_1/V_2$  de l'amplificateur  $A$  (une diode est représentée par sa résistance dynamique  $rd$ ).*

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{R_{53} + R_{50} + rd}{R_{50}}$$

*D.4 Ecrire  $V_1$  sous la forme :  $V_1 = kV_2 + V_d$ .  $V_d$  représente la tension aux bornes des diodes comprise entre  $-0,7V$  et  $+0,7V$ .*

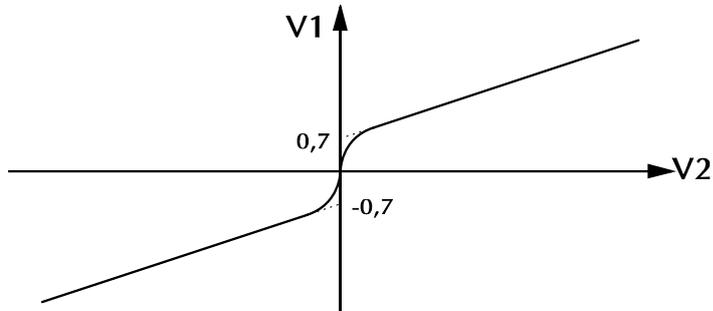
$$V_1 = \frac{R_{53} + R_{50}}{R_{50}} V_2 + V_d \rightarrow k = \frac{R_{53} + R_{50}}{R_{50}}$$

*D.4.1 Déterminer la valeur de k et tracer l'allure de V1 en fonction de V2.*

---

$$k = \frac{R_{53} + R_{50}}{R_{50}} = 2,8$$

$$V_1 = 2,8V_2 + V_d$$



---

*D.4.2 Donner les valeurs limite de A.*

Le gain A varie théoriquement de l'infinie pour une amplitude nulle à 2,8 pour une amplitude de signal infinie ; il existe une valeur pour laquelle A = 3

---

*D.5 Quelle doit être la valeur équivalente de la résistance de deux diodes pour avoir une amplitude d'oscillation constante ? Montrer que le dispositif est stable (rd diminue lorsque l'amplitude augmente et vice versa).*

---

$$A = \frac{R_{53} + R_{50} + rd}{R_{50}} = 3 \rightarrow rd = 4,3K\Omega .$$

Lorsque l'amplitude augmente le gain diminue et vice versa d'après D.4.2. La non linéarité de la diode maintient une amplitude constante.

---

## Partie E :

E.1 En considérant que le signal en écho est retardé de  $2T$  et atténué de  $At$ , donner l'expression de  $S(t)$ .

$$S(t) = E(t) + At \cdot E(t - 2T)$$

E.2 A partir de l'expression précédente, donner la fonction de transfert de l'ensemble appelé  $H(f)$ . On rappelle les transformées de Fourier :

$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \cdot \exp(-j2\pi f t_0)$  et  $\delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1$  avec  $\delta(t)$  est l'impulsion de Dirac.

$$S(f) = E(f) + At \cdot E(f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot 2T} = E(f)(1 + At \cdot e^{-j2\pi f \cdot 2T})$$

$$\rightarrow H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = 1 + At \cdot e^{-j2\pi f \cdot 2T}$$

E.3 Donner l'expression de réponse impulsionnelle  $h(t)$ .

$$h(t) = \delta(t) + At \cdot \delta(t - 2T)$$

E.4 Pour retrouver au niveau de l'utilisateur le signal  $E(t)$  et ainsi corriger la distorsion, on utilise dans le récepteur (autocommutateur), un filtre qui annule l'écho de fonction de transfert :  $H_{an}(f) = \frac{1}{H(f)}$  (figure 24).

E.4.1 Donner l'expression de  $H_{an}(f)$  en utilisant le développement de Taylor suivant :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-1)^n x^n, \text{ valable pour } |x| < 1$$

Préciser la condition qui doit être remplie.

$$H_{an}(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{1 + At \cdot e^{-j2\pi f \cdot 2T}} = \frac{1}{1+x}$$

Avec la condition  $|At \cdot e^{-j2\pi f \cdot 2T}| < 1$  on peut écrire  $H_{an}(f) = 1 + \sum_{n=1}^N (-1)^n At^n \cdot e^{-j2\pi f \cdot n \cdot 2T}$

*E.4.2 Donner la réponse impulsionnelle  $han(t)$ .*

$$han(t) = \delta(t) + \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot At^n \cdot \delta(t - 2nT)$$

*E.4.3 Donner l'équation  $S_1(t)$ .*

$$S_1(t) = S(t) + \sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot At^n \cdot S(t - 2nT)$$

*E.4.4 En s'arrêtant à l'ordre 1 du développement de Taylor, montrer que ce système annule l'effet du retard  $2T$ .*

Pour  $n = 1$

$$S_1(t) = S(t) - At \cdot S(t - 2T) \text{ En remplaçant } S(t) \text{ par son expression dans E.1}$$
$$\ll S(t) = E(t) + At \cdot E(t - 2T) \gg. : S_1(t) = E(t) + At \cdot E(t - 2T) - At \cdot S(t - 2T) =$$
$$E(t) + At \cdot E(t - 2T) - At \cdot E(t - 2T) - At^2 \cdot E(t - 4T) = E(t) - At^2 \cdot E(t - 4T).$$

## Partie F :

### F.1 Montrer que la fonction sinus peut s'écrire sous la forme :

$$\sin(N\omega T_e) = 2 \cos(\omega T_e) \sin[(N-1)\omega T_e] - \sin[(N-2)\omega T_e] \quad \text{avec } T_e : \text{période d'échantillonnage}$$

---

$$\sin(N\omega T_e + \omega T_e) = \cos(\omega T_e) \sin(N\omega T_e) + \cos(N\omega T_e) \sin(\omega T_e)$$

$$\sin(N\omega T_e - \omega T_e) = \cos(\omega T_e) \sin(N\omega T_e) - \cos(N\omega T_e) \sin(\omega T_e)$$

L'addition de ces deux relations donne :

$$\sin(N\omega T_e + \omega T_e) + \sin(N\omega T_e - \omega T_e) = 2 \cos(\omega T_e) \sin(N\omega T_e)$$

$$\sin((N+1)\omega T_e) = 2 \cos(\omega T_e) \sin(N\omega T_e) - \sin((N-1)\omega T_e)$$

Soit en remplaçant N par N-1 :

$$\sin(N\omega T_e) = 2 \cos(\omega T_e) \sin[(N-1)\omega T_e] - \sin[(N-2)\omega T_e]$$

---

### F.2 On pose :

$$Y_N = \sin(N\omega T_e) \quad \text{et} \quad X_N = \sin(N\omega T_e)$$

Écrire les équations aux différences qui permettent de générer les deux sinusoïdes  $Y_N$  et  $X_N$ .

---

$$Y_N = 2 \cos(\omega T_e) \cdot Y_{N-1} - Y_{N-2}$$

$$X_N = 2 \cos(\omega T_e) \cdot X_{N-1} - X_{N-2}$$

---

### F.3 Dédurre l'expression complète qui permet de générer ce signal DTMF.

---

$$DTMF = X_N + Y_N = 2 \cos(\omega T_e) \cdot Y_{N-1} - Y_{N-2} + 2 \cos(\omega T_e) \cdot X_{N-1} - X_{N-2}$$

---