Corrigé Sujet 2014

A1- Caractérisation des cellules de filtrage

A1.1

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R_2 Z_{c1}}{R_1(Z_{c1}+Z_{c2}+R_2)+Z_{c1}(Z_{c2}+R_2)}$$

A1.2

$$H_1(p) == \frac{R_2C_2\,p}{1+(R_2C_2+R_1C_1+R_1C_2)\mathrm{p}+R_1R_2C_1C_2\,p^2} = \frac{\frac{1}{R_1C_1}\,p}{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}+\frac{(R_2C_2+R_1C_1+R_1C_2)}{R_1R_2C_1C_2}\,p+p^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}};\quad A=\frac{1}{R_1C_1};\quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R_2C_2+R_1C_1+R_1C_2}{R_1R_2C_1C_2}\ ;\quad Q=\frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{R_2C_2+R_1C_1+R_1C_2}$$

C’est un filtre passe bande d’ordre 1.

A1.3

$$H_1(j\omega) = \frac{Aj\omega}{\omega_0^2+\frac{\omega_0}{Q}\,j\omega+\left(j\omega\right)^2} = \frac{A}{\frac{\omega_0}{Q}-j(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega)}\quad ;\quad \left|H_1(j\omega)\right| = \frac{A}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}+\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2}}$$

$$H_{1\max} = \frac{AQ}{\omega_0}\ \text{quand}\ \omega=\omega_0\ ;$$

$$H_1(j\omega) = \frac{H_{1\max}}{1-jQ(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0})}\quad \text{et}\quad \left|H_1(j\omega)\right| = \frac{H_{1\max}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

A1.4

$$\left|H_1(j\omega)\right| = \frac{H_{1\max}}{\sqrt{2}}\ \text{d’où}\ \Rightarrow Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1$$

La résolution de cette équation donne :

$$\omega_H = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2}+1\quad \text{et}\quad \omega_B = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2}-1$$

$\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q};\ \omega_B\cdot\omega_H = \omega_0^2$; ω_0 : fréquence centrale et Q : Facteur de qualité

A1.5

$$H_1 dB = 20\log\left|H_1(j\omega)\right| = 20\log H_{1\max} - 10\log\left[1+Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]$$

- Pour $\omega << \omega_0$

  $H_1 dB \approx 20\log\omega + 20\log\left(\frac{A}{\omega_0^2}\right)$; pente = 20dB/décade

- Pour $\omega = \omega_0$

  $H_1 dB = 20\log H_{1\max}$

- Pour $\omega >> \omega_0$

  $H_1 dB \approx -20\log\omega + 20\log A$; pente = -20dB/décade

Les coordonnées de point d'intersection :

$20\log\omega_{\text{int}} + 20\log\left(\frac{A}{\omega_0^2}\right) = -20\log\omega_{\text{int}} + 20\log A$ d'où $\omega_{\text{int}} = \omega_0$

A1.6

$$H_1(j\omega) = \frac{A\left[\frac{\omega_0}{Q} + j\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)\right]}{\frac{\omega_0^2}{Q^2}+\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2}$$

$$\phi_1 = arctg\left[\frac{\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega}{\frac{\omega_0}{Q}}\right] = arctg\left[\frac{Q}{\omega_0}\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)\right] = arctg\left[Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

- Pour $\omega << \omega_0$ $\quad \phi_1 \approx arctg\left(Q\frac{\omega_0}{\omega}\right);\quad \phi_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}$
- Pour $\omega >> \omega_0$ $\quad \phi_1 \approx -arctg\left(Q\frac{\omega_0}{\omega}\right);\quad \phi_1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- Pour $\omega = \omega_0$ $\quad \phi_1 \approx +arctg(0);\quad \phi_1 \Rightarrow 0$

A1.7 $R_1 = 1{,}8k\Omega,\ R_2 = 5k\Omega,\ C_1 = 10nF,\ C2 = 100nF$

$A = 55555 s^{-1}$; $Q = 0{,}136$; $f_0 = 2{,}6KHz$; $f_H = 12{,}2KHz$
$f_B = 224Hz$; $H_{1\max} = 0{,}717(-2{,}9dB)$; $H_{\text{intersection}} = +14{,}4dB$

A1.8 voir courbe

A2- Cellule de filtrage actif

A2.1 ---

A2.2

$$H_2(p) == \frac{k}{1+\left[(R_2+R_1)C_1+R_1C_2(1-k)\right]p+R_1R_2C_1C_2p^2} = \frac{\frac{k}{R_1R_2C_1C_2}}{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}+\frac{(R_2+R_1)C_1+R_1C_2(1-k)}{R_1R_2C_1C_2}p+p^2}$$

C’est un filtre passe bas d’ordre 2

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}; \quad A=\frac{k}{R_1R_2C_1C_2}; \quad ; \quad Q = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{(R_2+R_1)C_1+R_1C_2(1-k)}$$

A2.3

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \quad A=\frac{k}{R^2C^2}; \quad ; \quad Q = \frac{1}{3-k}$$

A2.4

$$H_2(j\omega) = \frac{A}{\omega_0^2+\frac{\omega_0}{Q}j\omega+(j\omega)^2} = \frac{A}{\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega_0}{Q}\omega} \quad ; \quad |H_2(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}$$

$$\phi_2 = -arctg\,\frac{\omega\cdot\omega_0}{Q(\omega_0^2-\omega^2)}$$

$$H_{2\max} = |H_2(\omega=0)| = \frac{A}{\omega_0^2}$$

A2.5

$$H_2(j\omega) = \frac{H_{02}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{\omega_0Q}}$$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{H_{02}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2Q^2}}}$$

$|H_2(j\omega)|$ est Max. quand le dénominateur est Min. (dérivé nulle)

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2Q^2}\right]=0$$

$$-2Q^2\left(1-\frac{\omega_{MAX}^2}{\omega_0^2}\right)\frac{2\omega_{MAX}}{\omega_0^2}+\frac{2\omega_{MAX}}{\omega_0^2}=0$$

$$\omega_{MAX} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$$

$$\left|H_{2\mathrm{MAX}}\right| = \left|H_2(j\omega)\right|_{\omega=\omega_{MAX}} \frac{H_{02}Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

Le maximum existe quand ω_{MAX} est positive $1-\frac{1}{2Q^2}>0 \Rightarrow Q>\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707$

A2.6 fréquence de coupure ω_c

$$\left|H_2(j\omega_c)\right| = \frac{H_{02}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)^2+1}}$$

A2.7

$$\left|H_{2dB}\right| = 20\log\frac{H_{02}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2Q^2}}} = 20\log H_{02} - 10\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2Q^2}\right]$$

$\omega >> \omega_0$; $\quad H_{2dB} \approx 20\log H_{02} - 40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ → pente -40dB/décade

A2.8

AN1 : $H_{02}=1{,}15(1{,}2dB)$; $Q=0{,}54$; $f_0=3{,}3KHz$; $f_c=2{,}43KHz$ pas de Max. car $Q<0{,}707$

AN2 : $H_{02}=2{,}22(6{,}9dB)$; $Q=1{,}28$; $f_0=3{,}39KHz$; $f_c=4{,}7KHz$
$f_{MAX}=2{,}8KHz$; $H_{2MAX}=3{,}08(9{,}8dB)$