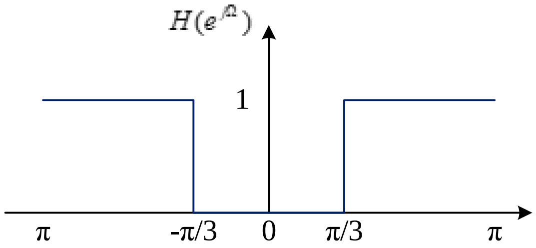
Exercice N°6

1. Synthèse de filtre RIF (ou FIR)

1.1. $\Omega_c = 2\pi f_c / \mathrm{F}_e = 2\pi \times 6000 / 36000 = \pi / 3$



$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{\pi - \Omega_c}{\pi} & n = 0 \\ -\dfrac{\sin(n \cdot \Omega_c)}{n \cdot \pi} & -M \le n \le M \;\; et \;\; n \ne 0 \end{cases}$$

n	0	1	2	3	5
H(n)	2/3	-0.275	-0.1378	0	0.069

1.2. C'est la fenêtre de Hanning

Ondulation <0.0546 et Attenuation >40dB

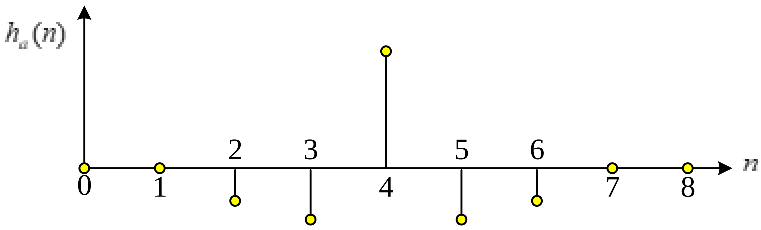
D'où $N = \dfrac{3,1}{\Delta f}$; $\Delta f = (6000 - 2000) / 36000 = 1/9$ d'où N= 28

1.3. $h_a(n) = h(n) \cdot w_{han}(n)$; $w_{han}(n) = 0,5 + 0,5\cos(\dfrac{n \cdot \pi}{M})$

n	0	1	2	3	5
$w_{han}(n)$	1	0,853	0,5	0,146	0
$h_a(n)$	2/3	-0.234	-0.0689	0	0

$$h_a(n) = -0.0689\delta(n-2) - 0,234\delta(n-3) + 0,667\delta(n-4) - 0,234\delta(n-5) - 0.0689\delta(n-6)$$

1.4. Tracé de la réponse impulsionnelle



2. Synthèse du filtre RII (ou IIR)

2.1. Tracé des gabarits des filtres :

$\Omega_c = 2\pi f_c / \mathrm{F}_e = 2\pi \times 6000 / 36000 = \pi / 3 \approx 1,047 rad$

$\Omega_a = 2\pi f_a / \mathrm{F}_e = 2\pi \times 2000 / 36000 = \pi / 9 \approx 0,349 rad$

Transposition en filtre analogique

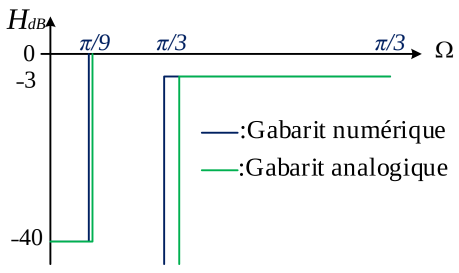
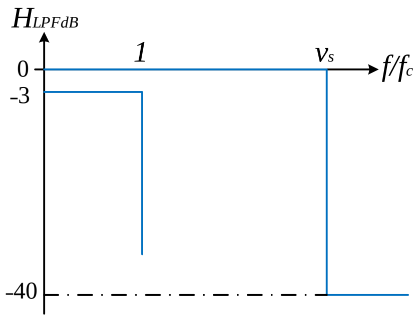
$$\omega_{ac} = \frac{2}{T}\tan(\frac{\Omega_c}{2}) = 2 \times 36000 \tan(2\pi \times 6000 / (2 \times 36000)) = 41569,219 \,\mathrm{rad/s}$$

$\Omega_{ac} = \omega_{ac} / \mathrm{F}_e = 1,1547 rad$; $f_{ac} = \omega_{ac} / 2\pi = 6,616 kHz$

$$\omega_{aa} = \frac{2}{T}\tan(\frac{\Omega_a}{2}) = 2 \times 36000 \tan(\pi / 9) = 12659,542 \,\mathrm{rad/s}$$

$\Omega_{aa} = \omega_{aa} / F_e = 0,352 rad$; $f_{aa} = \omega_{aa} / 2\pi = 2020,55 kHz$

$$v_s = \frac{\omega_{aa}}{\omega_{ac}} = \frac{6616}{2020,55} = 3,27$$

Gabarits du filtre numérique et analogique	Gabarit du prototype passe bas normalisé
	

2.2. Ordre du filtre

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{0,1As}-1}{10^{0,1Ap}-1}\right)}{\log_{10}(v_s)} = \frac{1}{2} \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{0,1\times 40}-1}{10^{0,1\times 3}-1}\right)}{\log_{10}(3,27)} = 3,88 *$$

D'où $N = 4$

D'après le tableau des filtres de Butterworth

TABLE 8.3 3 dB Butterworth lowpass prototype transfer functions ($\varepsilon = 1$)

n	$H_P(s)$
1	$\frac{1}{s+1}$
2	$\frac{1}{s^2+1.4142s+1}$
3	$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$
4	$\frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1}$
5	$\frac{1}{s^5+3.2361s^4+5.2361s^3+5.2361s^2+3.2361s+1}$
6	$\frac{1}{s^6+3.8637s^5+7.4641s^4+9.1416s^3+7.4641s^2+3.8637s+1}$

$$H_n(p) = \frac{1}{p^4 + 2,6131p^3 + 3,4143p^2 + 2,6131p + 1}$$

2.3. $H_n(p)$: fonction de transfert normalisé. On procède à la dérmonalisaton en remplaçant p par $\frac{\omega_c}{p}$. D'où $H(p) = H_n(p)\big|_{p=\frac{\omega_c}{p}}$

Pour trouver la fonction de transfert en z en utilisant l'approximation bilinéaire, il suffit de remplacer dans $H(p)$, p par $\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$. D'où $H_{bi}(z) = H(p)\big|_{p=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$

EXERCICE N°7

1. Etude du filtre analogique

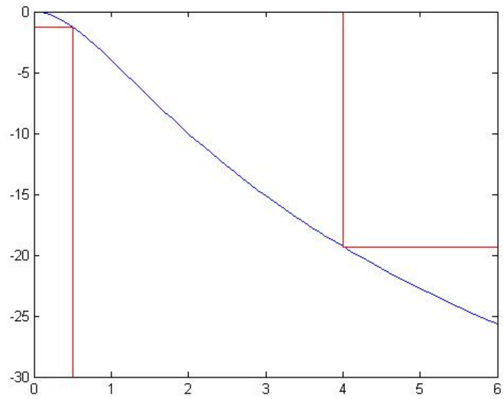
1.1. $p^2+3p+2=0 \Rightarrow p=-2 \;\; ou \;\; p=-1$. Le filtre est stable puisque les pôles sont des réels négatifs.

1.2. $|H(j\omega)|=\dfrac{2}{\sqrt{\left(2-\omega^2\right)^2+9\omega^2}}$ d'où $H_{dB}=20\log(2)-10\log\left(\left(2-\omega^2\right)^2+9\omega^2\right)$

ω	0	0,5	1	2	4
H_{dB}	0	-1,23	-3,98	-10	-19,3

C'est un filtre passe bas

1.3. Tracé du module



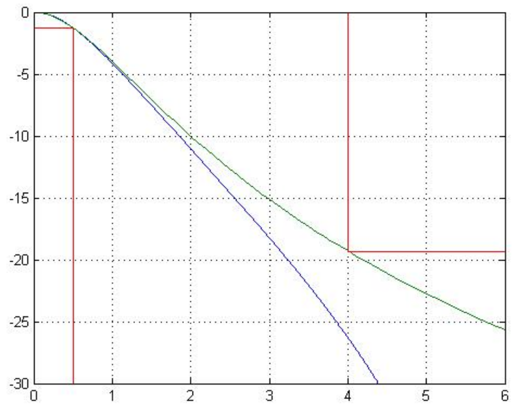
2. Synthèse du filtre IIR

2.1. On remplace dans dans $H(p)$, p par $\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$. d'ou $H_{bi}(z)=\dfrac{0,0667(1+z^{-1})^2}{1-0.9333z^{-1}+0,2z^{-2}}$

2.2. Module de $H_{bi}(e^{j\Omega})$:

$$|H_{bi}(e^{j\Omega})|=\frac{0,0667\cdot 4\cos^2(\Omega/2)}{\sqrt{\left(1-0,9333\cos(\Omega)+0,2\cos(2\Omega)\right)^2+\left(0,9333\sin(\Omega)-0,2\sin(2\Omega)\right)^2}}$$

ω	0	0,5	4	2π
H_{bidB}	0	-1,31	-26,3	-∞



2.3. Pas tout à fait, puisque en $\omega_c=0,5$, le module sort légèrement du gabarit. Chaque valeur de $|H(e^{j\omega T})|$ peut être calculée en utilisant la formule de prédistorsion.

2.4. Il faut recalculer les coefficients en utilisant la formule de prédistorsion.

3. Synthèse d'un filtre FIR

3.1. Fenêtre regtangulaire (<-20dB), $N = \frac{0,9}{\Delta f}$;

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{0,5}{2\pi} = 0,079577 Hz \text{ et } f_a = \frac{\omega_a}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = 0,636619 Hz$$

$$\Delta f = (0,636619 - 0,079577)/2 = 0,278521 \text{ d'où } N \geq \frac{0,9}{0.278521} = 3,23 \text{ soit N = 4}$$

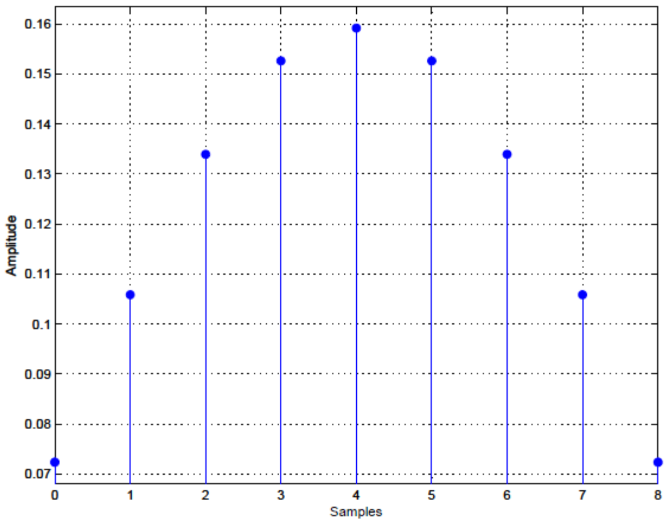
3.2. $h(n) = \frac{\sin(n \cdot \Omega_c)}{n \cdot \pi}$ avec $\Omega_c = 2\omega_p T$

3.3. $h(n) = 0,0724;\ 0,10258;\ 0,1339;\ 0,1526;\ 0,1592;$ pour $n = -4; -3; -2; -1; 0$ ($h(n) = h(-n)$)

3.4. Fenêtre rectangulaire $w(n) = 1$ d'où

$$h_{fen}(n) = 0,0724\delta(n) + 0,10258\delta(n-1) + 0,1339\delta(n-2) + 0,1526\delta(n-3) + 0,1592\delta(n-4) + 0,1526\delta(n-5) + 0,1339\delta(n-6) + 0,10258\delta(n-7) + 0,0724\delta(n-8)$$

3.5. Réponse impulsionnelle



3.6. $H_{fen}(z) = 0,0724 + 0,10258z^{-1} + 0,1339z^{-2} + 0,1526z^{-3}\ 0,1592z^{-4} +$

$0,1526z^{-5} + 0,1339z^{-6} + 0,10258z^{-7} + 0,0724z^{-8}$