TD2 : DSP (LES FILTRES NUMERIQUES)

EXERCICE N°1

Calculez les coefficients de filtre pour un filtre passe-bande FIR à 5 rais, avec une fréquence de coupure inférieure de 2000 Hz et une fréquence de coupure supérieure de 2400 Hz. La fréquence d'échantillonnage étant égale à 8 000 Hz.

EXERCICE N°2

1. Calculer les coefficients d'un filtre RIF passe-bas à N=5 coefficients, de fréquence de coupure f_c=882Hz. La fréquence d'échantillonnage est F_e=44100Hz.

2. Donner la réponse impulsionnelle de ce filtre (on se limitera aux seuls coefficients connus).

3. Donner sa fonction de transfert en Z.

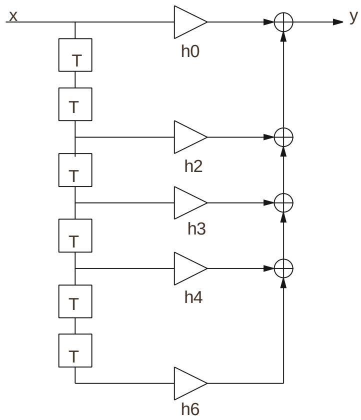
4. En déduire son équation aux différences (en développant le raisonnement).

5. Donner le signal de sortie résultant de l'application de cette équation au signal d'entrée :

e={1,0,0,0,0}.

EXERCICE N°3

Soit un filtre à réponse impulsionnelle finie dont le schéma de fonctionnement dans le domaine temporel est donné figure ci-contre. On pose T_e la période d'échantillonnage du système numérique, $T_e = 1$.



1. Donner les expressions de l'équation aux différences finies ainsi que la fonction de transfert en Z.
2. Déterminer et tracer la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre, lorsque $h_1 = h_5 = 0.1$, $h_2 = h_4 = -0.3$, $h_3 = 0.49$.
3. Calculer la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$ du filtre. Déterminer son module et sa phase. On note que :

$$e^{-j\Omega_1} + e^{-j\Omega_2} = 2 \times e^{-j\frac{(\Omega_1+\Omega_2)}{2}} \times \cos(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2})$$

4. Donner les valeurs du module en $\Omega = 0, \pi/2, \pi, 2\pi$.
5. Tracer approximativement son module. De quel type de filtre s'agit-il?

EXERCICE N°4

Soit le filtre numérique suivant : $H(z) = 0,1.(z^{-1} + z^{-3}) + 0,2.z^{-2}$

On posera T_e, période d'échantillonnage, égal à $1ms$.

1. Donnez et tracez sa réponse impulsionnelle $h(n)$.
2. Calculez la réponse fréquentielle du système. Donnez la fréquence de coupure à -3dB.
3. Quel type de filtre est réalisé ?
4. Donnez l'expression de la sortie $y(n)$ du filtre en fonction de l'entrée $x(n)$.
5. Calculez et dessinez le signal de sortie du filtre $y(n)$ pour $n = 0 \ldots 7$ lorsque l'entrée est :

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

EXERCICE N°5

Soit le filtre de réponse impulsionnelle suivante :

$h(n)= a_0\delta(n)+ a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + a_1\delta(n-3) + a_0\delta(n-4)$

1. Donner l'expression de l'équation aux différences finies de ces filtres et de sa fonction de transfert en Z.
2. En déduire la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$, puis l'expression de son module et de sa phase.
3. Calculer les valeurs du module pour $\Omega = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}$.
4. Déterminer où se trouve le minimum et le maximum de ce module. En déduire quel type de filtre peut être réalisé par $h(n)$.
5. Trouver les valeurs des coefficients $\boldsymbol{a_i}$ tels que $|H(e^{j\Omega})|$ soit égal à $1, 0.5, 0$ en, respectivement, $\Omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, avec $a_i \geq 0 \ \ \forall i$
6. Chercher F_c la fréquence de coupure à $3dB$ du filtre si la fréquence d'échantillonnage $F_e = 40\text{kHz}$.

EXERCICE N°6

L'objectif de ce problème est la réalisation d'un filtre numérique passe-haut dont les caractéristiques sont:

- ondulation en bande passante $\delta_1 = 3dB$,
- atténuation $\delta_2 = 40dB$,
- fréquence de coupure à $-3dB$, $fc. = 6kHz$,
- fréquence en bande atténuée $fa = 2kHz$,
- fréquence d'échantillonnage $Fe = 36kHz$

1. *Synthèse de filtre RIF à phase linéaire par fenêtrage*

1.1. On considérera pour cette synthèse un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure f_c. Après avoir tracé de manière précise le filtre idéal $H(e^{j\Omega})$, calculez sa réponse impulsionnelle $h(n)$ pour $n = [-4... + 4]$.

1.2. En fonction de l'atténuation et de la sélectivité, quel type de fenêtre faut-il utiliser, et quelle est la longueur N d'un filtre RIF dont la phase serait linéaire?

1.3. Exprimez $h_a(n)$, pour $n = [-4... + 4]$.

1.4. Tracez sa réponse impulsionnelle dans le cas où $N = 9$.

2. Synthèse de filtre RII par la méthode bilinéaire.

2.1. Après avoir tracé le gabarit du filtre numérique, donnez les gabarits analogique et passe bas normalisé correspondants. La méthode utilisée est la transformation bilinéaire.

2.2. En déduire l'ordre et la fonction du filtre de Butterworth normalisé $H_n(p)$.

2.3. Expliquez, sans les calculer, la méthode de dénormalisation vers le filtre passe-haut $H(p)$, et la méthode permettant d'obtenir la fonction de transfert $H_{bi}(z)$ du filtre numérique entrant dans le gabarit numérique de départ.

EXERCICE N°7

Un filtre analogique présente une fonction de transfert exprimée par :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 3p + 2}$$

1. *Etude du filtre analogique*

1.1. Calculez les pôles et les zéros de $H(p)$. Le filtre est-il stable?

1.2. Donnez le module de la réponse fréquentielle $|H(j\omega)|$ de ce filtre. Calculez le module (dB) en ω = 0, 0.5, 1, 2, 4 $[rad/s]$. De quel type de filtre s'agit-il?

1.3. Tracez approximativement le module pour ω variant de 0 à 6 rad/s. Dessinez sur la même courbe un gabarit correspondant à ce filtre analogique, pour lequel on prendra pour pulsations en bande passante et atténuée, respectivement $\omega_p = 0.5\ rad/s$ et $\omega_a = 4\ rad/s$. On posera pour la suite les valeurs d'échantillonnage suivantes : $T = 0.5\ s$, $F_e = 2\ Hz$, $\omega_e = 4\pi\ rad/s$.

2. *Synthèse d'un filtre RII par la transformation bilinéaire.*

2.1. Donnez l'expression de la fonction de transfert en z du filtre numérique $H_{bi}(z)$ obtenue par transformation bilinéaire sans prédistorsion.

2.2. Donnez la valeur de $|H_{bi}(e^{j\omega T})|$ en ω $[rad/s]$ = 0, ω_p, ω_a, $\omega_e/2$. Tracez approximativement le module sur la courbe de la question 1.

2.3. Le filtre entre-t-il dans le gabarit de la question 1? Expliquez comment prévoir les valeurs de $|H_{bi}(e^{j\omega T})|$ en $\omega[rad/s]$ = 0, ω_p, ω_a, $\omega_e/2$ à partir de celles calculées dans la question 1.

2.4. Expliquez comment obtenir l'expression de la fonction de transfert en z du filtre numérique $H'_{bi}(z)$ obtenue par transformation bilinéaire avec prédistorsion autour de ω_p.

3. Synthèse d'un filtre RIF par la méthode du fenêtrage.

On désire maintenant réaliser un filtre numérique RIF par la méthode du fenêtrage équivalent aux filtres précédents.

3.1. A partir du gabarit spécifié dans la question 1, quel type de fenêtrage doit-on utiliser et quelle doit être la longueur N de ce filtre?

3.2. Donnez l'expression des coefficients $h(n)$ de la réponse impulsionnelle du filtre idéal. On prendra une fréquence de coupure $\Omega_c = 2\omega_p T$.

3.3. Dessinez $h(n)$ et donnez ses valeurs pour $-4 \le n \le 4$.

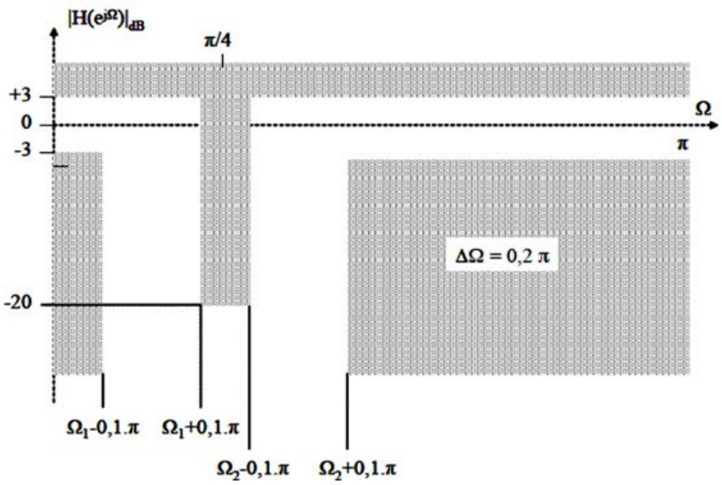
3.4. Donnez l'expression du filtre RIF $h_{fen}(n)$ causal à phase linéaire, de longueur finie N correspondant au gabarit.

3.5. Dessinez $h_{fen}(n)$.

3.6. Donnez l'expression de la fonction de transfert en z du filtre numérique $H_{fen}(z)$ obtenue.

EXERCICE N°8

1. On souhaite réaliser un filtre réjecteur de bande RIF à phase linéaire, de fréquences de coupure $\Omega_1 = \Omega_0 - \Omega_c$ et $\Omega_2 = \Omega_0 + \Omega_c$. On prendra $\Omega_0 = \pi/4$ et $\Omega_c = \pi/8$.



1.1. Prévoir le type de la réponse impulsionnelle ainsi que la parité de sa longueur N.
1.2. Donner l'expression des coefficients $h(n)$ de la réponse impulsionnelle du filtre idéal.
1.3. On souhaite transformer $h(n)$ en un filtre causal à phase linéaire, de longueur finie N la plus petite possible. Quelle valeur de N choisir?

2. On cherche maintenant à réaliser un filtre RII respectant ce gabarit. Ce filtre RII est synthétisé par la méthode de la transformation bilinéaire. La fréquence d'échantillonnage est fixée à $8kHz$.
2.1. Dessiner le gabarit analogique équivalent.
2.2. En déduire le gabarit du prototype passe-bas.
2.3. Déterminer l'ordre et donner la fonction de transfert normalisée $H_N(p)$.
2.4. Exprimer la fonction de transfert $H(p)$ du filtre analogique équivalent en fonction de la largeur de bande analogique W et de la pulsation centrale analogique ω_0.