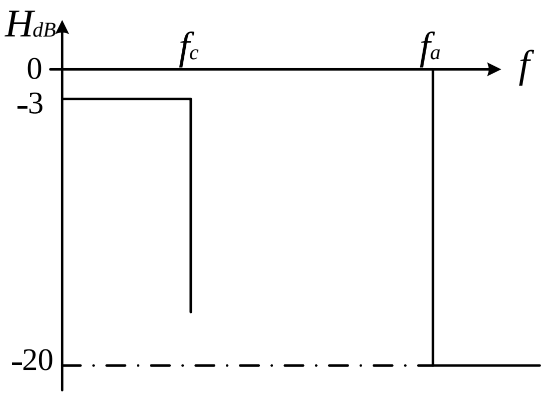
	Institut Superieur des Etudes Technologiques de Sousse Département Génie Electrique	*Année universitaire : 2017/2018* *Semestre : 1* *Date : Janvier 2018* *Durée : 1h30mn*
Matière : DSP	**Examen**	*Classes : AII3 – EQI3*
Documents : Non autorisés	*Enseignant : Ali HMIDENE*	*Nb. Pages : 2*

Exercice N° 1

On cherche à synthétiser un filtre passe-bas numérique, selon le gabarit ci-dessous :



$f_c = 10,24 kHz$

$f_a = 29,52 kHz$

$F_e = 100 kHz$

1. Synthèse du filtre FIR à phase linéaire par fenêtrage

1.1. Tracer la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$ du filtre passe bas idéal de fréquence de coupure f_c .

1.2. En fonction de l'atténuation et de la sélectivité, quel type de fenêtre faut-il utiliser, et quelle est la longueur N d'un filtre RIF dont la phase serait linéaire?

1.3. Exprimer $h(n)$ pour $n = -2$ $à$ $+2$.

1.4. Exprimer et tracer sa réponse impulsionnelle $h_a(n)$ pour $n = 5$.

1.5. Calculer la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$ du filtre. Déterminer son module et sa phase.

1.6. Donner les valeurs du module en dB pour $f = f_c$ et $f = f_a$. Conclure.

2. Synthèse du filtre IIR par l'approximation bilinéaire.

On désire maintenant réaliser un filtre IIR numérique en utilisant la transformation bilinéaire, à partir d'un prototype de Butterworth équivalent au filtre précèdent.

2.1. Transposez le gabarit en un gabarit analogique (prédistorsion) et calculez l'ordre du filtre de Butterworth à utiliser.

2.2. On prend dans ce qui suit un filtre de premier ordre de Butterworth, donner alors la fonction de transfert dénormalisé $H(p)$.

2.3. Déduire la fonction de transfert $H(z)$, en utilisant l'approximation bilinéaire.

2.4. Mettre la fonction de transfet en **z** sous la forme $H(z) = \dfrac{b(1+z^{-1})}{1+a\cdot z^{-1}}$.

2.4.1. Déterminer a et b.

2.4.2. déduire la réponse impulsionnelle $h(n)$.

Exercice N° 2

On désire réaliser un filtre FIR passe haut de fréquence de coupure $f_c = 2kHz$ et de fréquence d'échantillonnage $F_e = 8kHz$ en utilisant la fenêtre de Hamming.

1. Calculer les coefficients h_n du filtre passe haut idéal pour $n=-2$ à $+2$.
2. Calculer les coefficients w_n de fenêtre de Hamming correspondant.
3. Déterminer alors la réponse impulsionnelle du filtre $h_a(n)$.

Annexes :

Filtre FIR

Type de filtre	Réponse impulsionnelle d'un filtre idéal
Passe bas	$h(n)=\begin{cases} \dfrac{\Omega_c}{\pi} & n=0 \\ \dfrac{\sin(n\cdot\Omega_c)}{n\cdot\pi} & -M\le n\le M \text{ et } n\neq 0 \end{cases}$
Passe haut	$h(n)=\begin{cases} \dfrac{\pi-\Omega_c}{\pi} & n=0 \\ -\dfrac{\sin(n\cdot\Omega_c)}{n\cdot\pi} & -M\le n\le M \text{ et } n\neq 0 \end{cases}$

Estimation de la longueur du filtre selon le type de fenêtre $\Delta f = \left|f_a - f_c\right| / F_e$

Type de fenêtre	Fonction de. fenêtre pour $-M\le n\le M$	Longueur de fenêtre N	Ondulation dans la bande passante	Limite de la bande d'atténuation
Rectangulaire	1	$N=\dfrac{0,9}{\Delta f}$	0,7416	21 dB
Hanning	$0,5+0,5\cos(\dfrac{n\cdot\pi}{M})$	$N=\dfrac{3,1}{\Delta f}$	0,0546	44 dB
Hamming	$0,54+0,46\cos(\dfrac{n\cdot\pi}{M})$	$N=\dfrac{3,3}{\Delta f}$	00,0194	53 dB

Filtre IIR :

Transformation du prototype du filtre passe pas

Type de filtre	Transformation du prototype
Passe bas	$\dfrac{p}{\omega_c}$, ω_c : fréquence de coupure
Passe haut	$\dfrac{\omega_c}{p}$, ω_c : fréquence de coupure

Prédistorsion de fréquence	
$\omega_a=\dfrac{2}{T}\tan(\dfrac{\omega_n T}{2})$ T : période d'échantillonnage	$N\ge\dfrac{1}{2}\dfrac{\log_{10}\left(\dfrac{10^{0,1As}-1}{10^{0,1Ap}-1}\right)}{\log_{10}\left(\nu_s\right)}$

$\nu_s=\dfrac{\omega_{as}}{\omega_{ap}}$, ω_{ap} : fréquence de coupure et ω_{as} : fréquence d'atténuation

Prototype du filtre passe bas de Butterworth

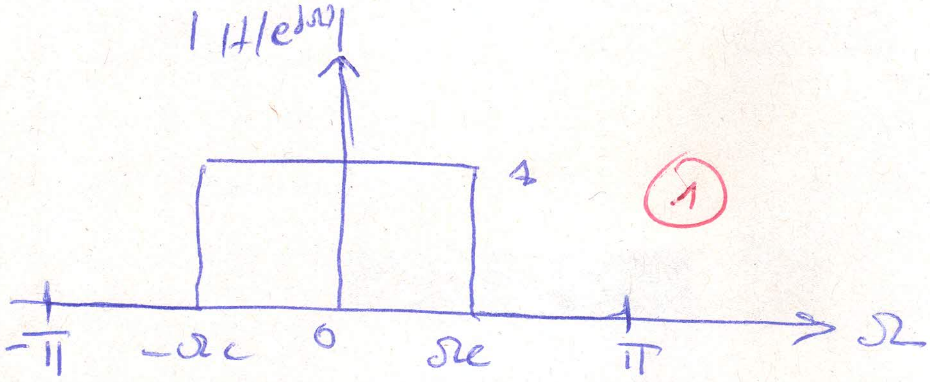
Ordre1 : $H(p)=\dfrac{1}{p+1}$ Ordre 2 : $H(p)=\dfrac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$

Corrigé Examen DSP Janv 2018

Ex N° 1

1/ Synthèse d'un filtre FIR

1.1)



(1)

1.2) On peut utiliser une ~~filtre~~ fenêtre rectangulaire

$A_t = 20\ dB < 21\ dB$ (0,5)

ondulation $3\ dB > 0{,}7416$ (0,5)

$N = \dfrac{0{,}9}{\Delta f}$ $\qquad \Delta f = \dfrac{f_a - f_c}{F_e} = \dfrac{29{,}52 - 10{,}24}{100} = 0{,}1928$

d'où $N = \dfrac{0{,}9}{0{,}1928} = 4{,}66$ soit $\underline{N=5}$ (1)

1.3) $h(n)$ pour $-2 \leq n \leq +2$

$h(0) = \dfrac{\Omega c}{\pi} = \dfrac{2\pi f c}{F e \pi} = \dfrac{0{,}2048\pi}{\pi} = \underline{0{,}2048}$ (0,5)

$h(1) = h(-1) = \dfrac{\sin(0{,}2048\pi)}{\pi} = 0{,}19086$ (0,5)

$h(2) = h(-2) = \dfrac{\sin(2 \times 0{,}2048\pi)}{2\pi} = 0{,}15278$ (0,5)

(3)

$b_0 = 0{,}15278$

$b_1 = 0{,}19086$

$b_2 = 0{,}2048$

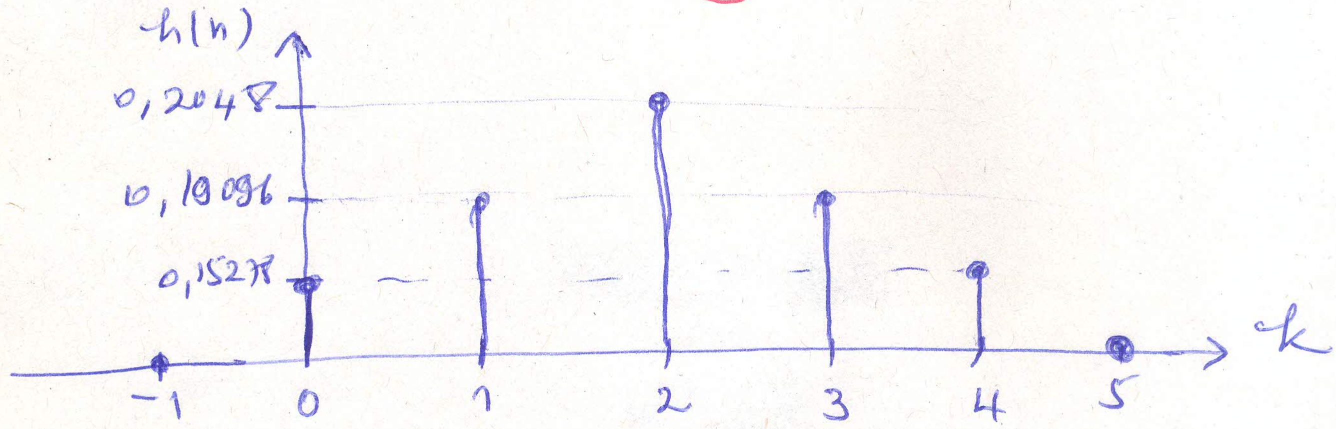
$b_3 = 0{,}19086 = b_1$ (0,5)

$b_4 = 0{,}15278 = b_0$

$h(n) = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + b_2\delta(n-2) + b_3\delta(n-3) + b_4\delta(n-4)$ 1 2

1.4) $h_1(n) = h(n) \longrightarrow$ fenêtre rectangulaire

~~1.5) $H(e^{j\Omega})$~~ = ? 1



1.5) $H(e^{j\Omega}) = ?$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}$$

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-2j\Omega} + b_1 e^{-3j\Omega} + b_0 e^{-4j\Omega}$$

$$= e^{-j2\Omega}\left(b_0 e^{2j\Omega} + b_1 e^{j\Omega} + b_2 + b_1 e^{-j\Omega} + b_0 e^{-2j\Omega}\right)$$ 1

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-2j\Omega}\left(b_2 + 2b_0 \cos 2\Omega + 2b_1 \cos \Omega\right)$$

$$|H(e^{j\Omega})| = |b_2 + 2b_0 \cos 2\Omega + 2b_1 \cos \Omega|$$ 0,5

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -2\Omega & b_2 + 2b_0\cos 2\Omega + 2b_1 \cos\Omega > 0 \\ -2\Omega + \pi & b_2 + 2b_0 \cos 2\Omega + 2b_1 \cos \Omega < 0 \end{cases}$$ 0,5

1.6) $f = f_c \qquad \Omega_c = 0,2048 \qquad |H(e^{j\Omega_c})| = 0,6 \qquad H_{dB} = -4,43$ 1

$f = f_a \qquad \Omega_c = \dfrac{2\pi f_a}{F_e} = 1,8548 \qquad |H(e^{j\Omega_a})| = 0,16$

$H_{dB} = -15$ dB 1

Il faut augmenter l'ordre du filtre

2/ Synthèse d'un filtre IIR

2.1) Transfert du Gabarit

$$w_{ac} = \frac{2}{T} tg \frac{w_c T}{2} = 6,6658229\ 10^4\ rad/s \quad 0,5$$

$$f_{ac} = 10,60851$$

$$w_{aa} = \frac{2}{T} tg \frac{w_a T}{2} = 266,72386\ 10^3 \quad 0,5$$

$$f_{aa} = 36,10253$$

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\log\left(\frac{10^{0,1 A_a} - 1}{10^{0,1 A_c} - 1}\right)}{\log \frac{w_a}{w_c}} = \quad 1$$

2.2) $$H(p) = \frac{1}{\frac{p}{w_c} + 1} = \frac{w_c}{p + w_c} \quad 1 \quad = \frac{66,658229\ 10^3}{p + 66,658229\ 10^3}$$

2.3) $$H(z) = \frac{w_c}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + w_c} \quad 1$$

2.4) $$= \frac{\frac{T}{2 + w_c T}(1 + z^{-1})}{1 + \frac{T w_c - 2}{T w_c + 2} z^{-1}} \quad 1 \quad = \frac{3,75\ 10^{-6}(1 + z^{-1})}{1 - 0,5 z^{-1}}$$

($-1,33$)

2.4.1) $$a = \frac{T w_c - 2}{T w_c + 2} = 0,5 \qquad b = \frac{T}{2 + w_c T} = 3,75\ 10^{-6} \quad 0,5$$

2.4.2) $$h(n) = \begin{cases} b & \text{pour } n = 0 \\ a^n b(1 - a) & n > 0 \end{cases} \quad 0,5$$

Ex N° 2

$f_c = 2kHz$ $\quad$ $F_e = 8 kHz$

1) $\Omega_c = 2\pi f_c / f_e = 2\pi \times \frac{2}{8} = 0,5\pi$

$h(0) = \frac{\pi - \Omega_c}{\pi} = \frac{\pi - 0,5\pi}{\pi} \; 0,5$ 0,5

$h(-1) = h(1) = -\frac{\sin(\Omega_c)}{\pi} = \frac{-\sin(90)}{\pi} = -\frac{1}{\pi} = -0,31831$ 0,5

$h(-2) = h(2) = \frac{-\sin \pi}{\pi} = 0$ 0,5

2) $w_{ham}(0) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{\cancel{\pi}}{2}\right) = \cancel{0,54}\; 1$ 0,5

$w_{ham}(1) = w_{ham}(-1) = 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi}{2} = 0,\cancel{08}\;4$ 0,5

$w_{ham}(2) = w_{ham}(-2) = 0,54 \cancel{+} 0,46 \cos \frac{2\pi}{2} = 0,08$ 0,5

4) $h_a(0) = 0,5 \times 1 = 0,5$ 0,5

$h_a(1) = h_a(-1) = -0,31831 \times 0,54 = -0,171887$ 0,5

$h_a(+2) = h_a(-2) = 0 \times 0,08 = 0$ 0,5

$h_a(n) = -0,171887\,\delta(n-1) + 0,5\,\delta(n-2) \cancel{+} 0,171887\,\delta(n-3)$ 0,5