

**Concours de Recrutement des Technologues Spécialité : Génie Electrique
Session 2020**

Epreuve de Technologie : Partie Electronique

Durée: 3 Heures

Coefficient : 0,5

Recommandations Générales

- Si au cours de l'épreuve, le candidat détecte ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant précisément les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- L'épreuve se compose de plusieurs parties indépendantes. A l'intérieur de chaque partie, de nombreuses questions sont également indépendantes.
- **Les candidats sont priés de rédiger les différentes parties du problème sur des feuilles séparées et clairement repérées.** Il leur est rappelé qu'ils doivent utiliser les notations propres au sujet, présenter clairement les calculs et dégager ou encadrer tous les résultats. Tout résultat incorrectement exprimé ne sera pas pris en compte. En outre, les correcteurs leur sauront gré d'écrire lisiblement et de soigner la qualité de leur copie.

Organisation du sujet

Le sujet comporte un dossier technique : Présentation du système et quatre grandes parties : A, B, C, D. Toutes les parties sont indépendantes

Partie A : Principe physique de mesure

Partie B : Chaîne de transmission Tx

Partie C : Chaîne de réception Rx

Partie D : Conversion analogique numérique

Documents fournis aux candidats :

Nombre de pages Enoncé	Documents réponses	Annexes
17 (pages) y compris la page de garde	3 Pages	Annexe 1 (1 page) Annexe 2 (1 pages) Annexe 3 (2 pages)

Saturomètre de pouls

I. Présentation

I.1 Présentation générale

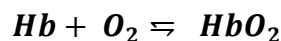
Définition

Les oxymètres de pouls, ou satumètre, sont utilisés en médecine pour déterminer le taux d'oxygène dans le sang. Le satumètre permet de mesurer la saturation en oxygène périphérique (SpO_2), qui reflète l'efficacité du système cardio-pulmonaire.



Principe de la mesure

Dans le sang, l'oxygène n'existe pas sous forme libre, mais se combine avec la déoxy-hémoglobine Hb pour former l'oxyhémoglobine HbO_2 , selon l'équilibre :



La technique d'oxymétrie de pouls cherche à déterminer la saturation en oxygène (SpO_2 : **saturation pulsée**), c'est-à-dire la proportion d'hémoglobine liée à l'oxygène par rapport à la quantité d'hémoglobine totale. Ce rapport est déterminé par spectrométrie, en exploitant la différence entre les spectres d'absorption de Hb et HbO_2 (**Annexe 1**).

Le principe de base de fonctionnement de cet appareil repose sur l'émission de deux lumières (rouge et infrarouge), de longueur d'onde respectivement 660 nm et 940 nm, à travers le doigt. L'absorption de la lumière rouge et infrarouge sera variable selon qu'elle rencontrera de l'hémoglobine réduite (Hb non oxygénée) ou de l'oxyhémoglobine (HbO_2 : Hb riche en oxygène). L'oxymètre de pouls calcule la saturation du flux pulsatile, en éliminant les valeurs correspondant au sang veineux et capillaire.

Cet appareil équipé d'un photo-détecteur qui reçoit la lumière passante à travers le doigt et la restitue au moniteur qui l'analyse et calcule le rapport lumière rouge / lumière infrarouge avant de mettre en évidence la valeur de la saturation en oxygène (**SpO_2 en pourcent**).

Valeurs normalisées du saturation (SpO_2 en pourcent).

Hémoglobine oxygénée en %	Saturation en oxygène
94 à 98 %	Correcte
90 à 93 %	Limite
< 90 %	Insuffisante = désaturation

La pulsation du sang

Les artères contiennent plus de sang pendant la systole que pendant la diastole, et par conséquent, leur diamètre augmente en raison de l'augmentation de la pression. Cet effet se produit seulement dans les artères et les artérioles mais pas dans les veines.

L'absorption de la lumière dans les tissus par les artères augmente pendant la systole, principalement en raison de la majorité de substances absorbantes (hémoglobine).

Cette alternance d'absorbance totale nous permet de faire la différence entre l'absorbance de la composante **pulsatile** du sang artériel (composante AC) et l'absorbance de la composante **non pulsatile** résultante du sang veineux, de la peau et des tissus (composante DC). L'intensité de la lumière transmise varie de I_H (maximum) à I_L (minimum) dans un délai d'un cycle cardiaque (Figure 1).

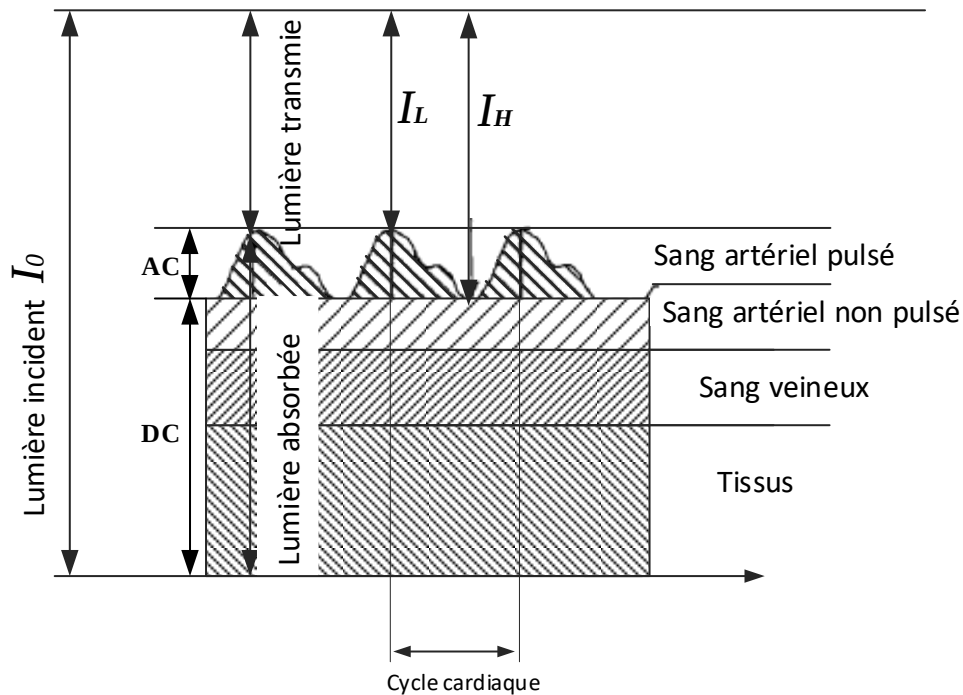


Figure 1 : Variation de l'atténuation de la lumière par les tissus, illustrant l'effet rythmique de la pulsation artérielle

I.2 Schéma synoptique

Le circuit AFE4403 est une solution analogique complète (AFE : Analog Front End) destinée aux applications d'oxymètre de pouls. Le circuit se compose d'un canal de réception à faible bruit, d'un canal de transmission à LED, et une partie de diagnostic pour la détection des défauts des capteurs. Pour faciliter les exigences de synchronisation et fournir l'horloge au circuit, un oscillateur est également intégré qui fonctionne à partir d'un cristal externe. Le circuit communique avec un microcontrôleur externe ou un processeur hôte en utilisant une interface SPI (Figure 2).

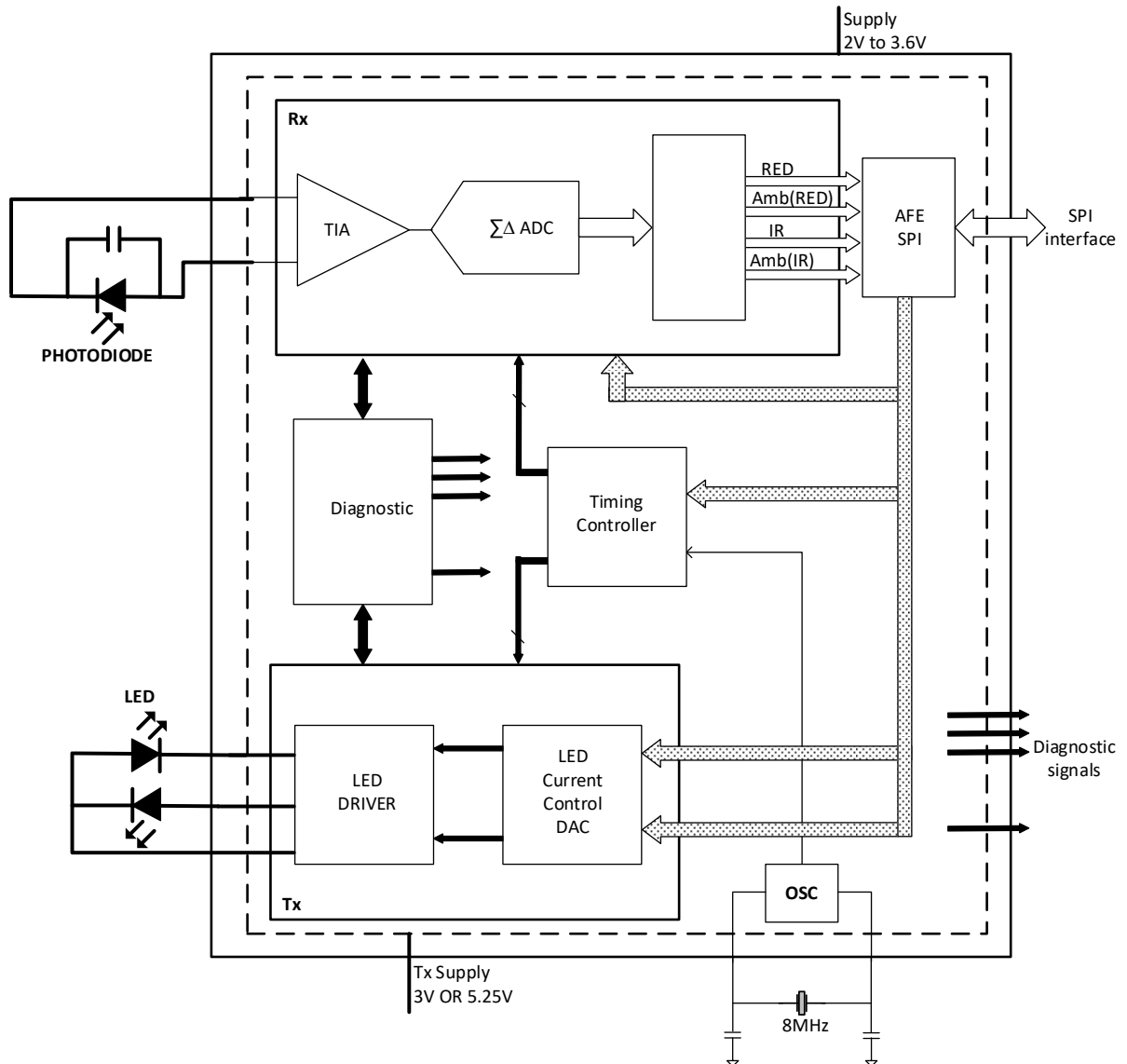


Figure 2 : Schéma synoptique du circuit AFE4403

II. Etude du système

L'étude que nous allons réaliser va nous amener à analyser le fonctionnement de certaines parties du système. Ce sujet est constitué de quatre parties totalement indépendantes, qui peuvent être traitées dans un ordre quelconque :

- Partie A : Principe physique de mesure.
- Partie B : Chaîne de transmission Tx.
- Partie C : Chaîne de réception Rx.
- Partie D : Conversion analogique numérique.

A. Principe physique de mesure

Si une lumière incidente monochromatique d'une intensité I_0 pénètre dans un milieu de concentration c et d'épaisseur d , une partie de cette lumière est transmise à travers le milieu, tandis qu'une autre partie est absorbée. L'intensité I de la lumière traversant le milieu diminue avec la distance d selon une loi de physique universelle, appelée **loi de Beer-Lambert** (Figure 3).

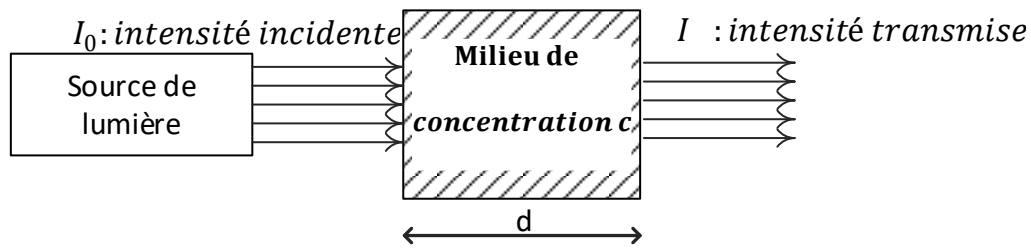


Figure 3

Si on dispose de deux composants (espèces) absorbants appelés HbO_2 et Hb de concentrations respectivement c_0 et c_r exposées à deux sources de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 d'intensité de lumière incidente respectivement I_{01} et I_{02} .

- On définit la **transmittance** T de la lumière traversant un milieu avec une substance absorbante comme le rapport entre la lumière transmise I et la lumière incidente I_0 .

$$T = \frac{I}{I_0} = 10^{-\varepsilon(\lambda).c.d}$$

- On définit l'**absorbance** $A(\lambda)$ comme la valeur négative du logarithme de la transmittance de la lumière.

$$A(\lambda) = -\log_{10}(T) = \varepsilon(\lambda).c.d$$

Les intensités transmises des lumières I_1 et I_2 pour les longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 sont :

$$I_1 = I_{01} \cdot 10^{-(\varepsilon_{01}.c_0 + \varepsilon_{r1}.c_r).d} \text{ pour } \lambda_1$$

$$I_2 = I_{02} \cdot 10^{-(\varepsilon_{02}.c_0 + \varepsilon_{r2}.c_r).d} \text{ pour } \lambda_2$$

Sachant que : c_0 : Concentration de l'hémoglobine HbO_2

c_r : Concentration de l'hémoglobine réduite Hb

ε_{01} : Coefficient d'absorption de l'hémoglobine HbO_2 à λ_1

ε_{r1} : Coefficient d'absorption de l'hémoglobine réduite Hb à λ_1

ε_{02} : Coefficient d'absorption de l'hémoglobine HbO_2 à λ_2

ε_{r2} : Coefficient d'absorption de l'hémoglobine réduite Hb à λ_2

A.1.1. Calculer les absorbances $A(\lambda_1)$ et $A(\lambda_2)$.

On définit le rapport $R = \frac{A(\lambda_1)}{A(\lambda_2)}$, avec $A(\lambda_1)$ et $A(\lambda_2)$ représentent respectivement les absorbances pour les longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 .

A.1.2. Montrer que $R = \frac{\varepsilon_{01}.c_0 + \varepsilon_{r1}.c_r}{\varepsilon_{02}.c_0 + \varepsilon_{r2}.c_r}$.

A.1.3. En déduire que la concentration de l'hémoglobine réduite $c_r = c_0 \cdot \frac{R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}$.

Sachant que la saturation en oxygène $SpO_2 = \frac{c_0}{c_0 + c_r}$.

A.1.4. Montrer que la saturation en oxygène $SpO_2 = \frac{R.\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{R.(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{02}) - (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{01})}$.

La Technique d'oxymétrie se base sur la mesure de l'absorbance pour deux longueurs d'ondes $\lambda_1 = 660nm$ et $\lambda_2 = 940nm$.

Les coefficients d'absorption ε_0 et ε_r changent avec les deux longueurs d'onde qui sont déjà notés respectivement ε_{01} , ε_{r1} , ε_{02} et ε_{r2} .

A.1.5. A partir des spectres Hb et HbO_2 données en annexe 1, compléter le tableau du document réponse A.1.5 en précisant les valeurs approchées de ϵ_{01} , ϵ_{r1} , ϵ_{02} et ϵ_{r2} .

Longueur d'onde λ nm	Coefficients d'absorption (cm^{-1}/M)	
	Hb	HbO_2
	ϵ_0	ϵ_r
$\lambda_1 = 660nm$		
$\lambda_2 = 940nm$		

A.1.6. Calculer les valeurs du rapport des absorbances R dans les cas suivants :

$$SpO_2 = 0 \text{ et } SpO_2 = 1$$

B. Chaîne de transmission (Tx)

Le schéma de la figure 4 représente la chaîne de transmission Tx, elle est constituée d'un pont en H (H-Bridge) qui commande les diodes (LED1 et LED2) à travers un driver. Les LEDs sont commandées alternativement par le pont H-bridge.

L'intensité du courant I_{LED} qui passe dans les diodes (LED1 et LED2) est ajustée par un DAC 8 bits.

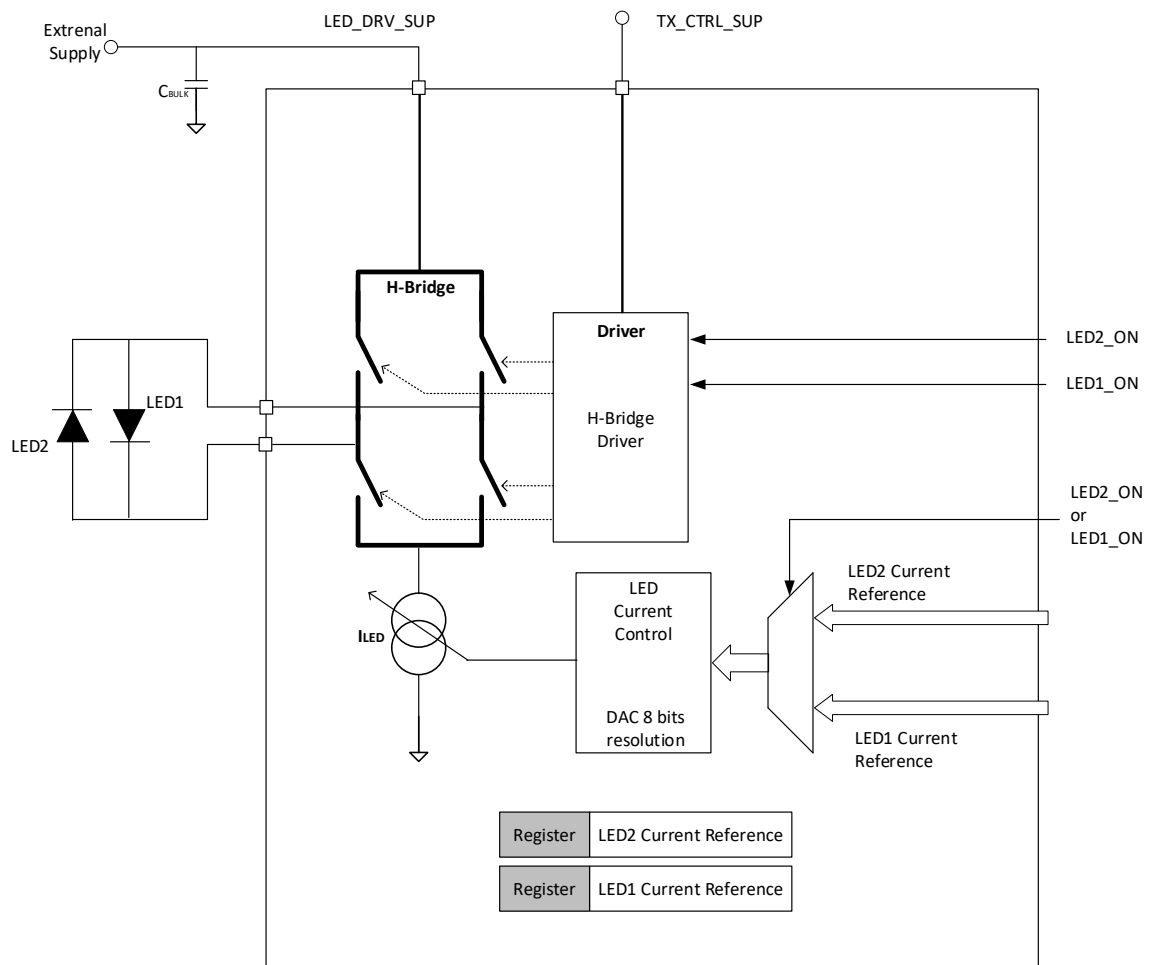


Figure 4 : Schéma synoptique du bloc de transmission Tx

Le schéma synoptique de la figure 5 représente un diagramme de la chaine de transmission Tx, faisant apparaître un amplificateur à découpage (chopper) pour réduire les bruits.

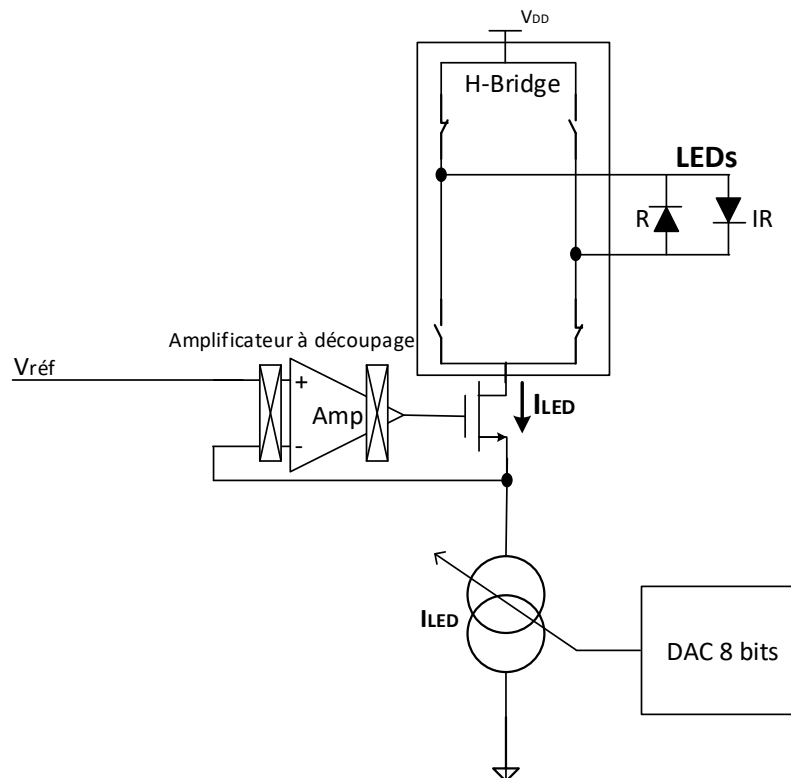


Figure 5

B.1. Amplificateur à découpage (chopper)

Le bruit est un gros problème dans les amplificateurs d'instrumentation pour les applications médicales, les amplificateurs à découpage sont également une pratique courante dans ce domaine. La figure 6 représente le schéma simplifié d'un amplificateur à découpage, avec $m(t)$ est un signal de découpage de période T_0 .

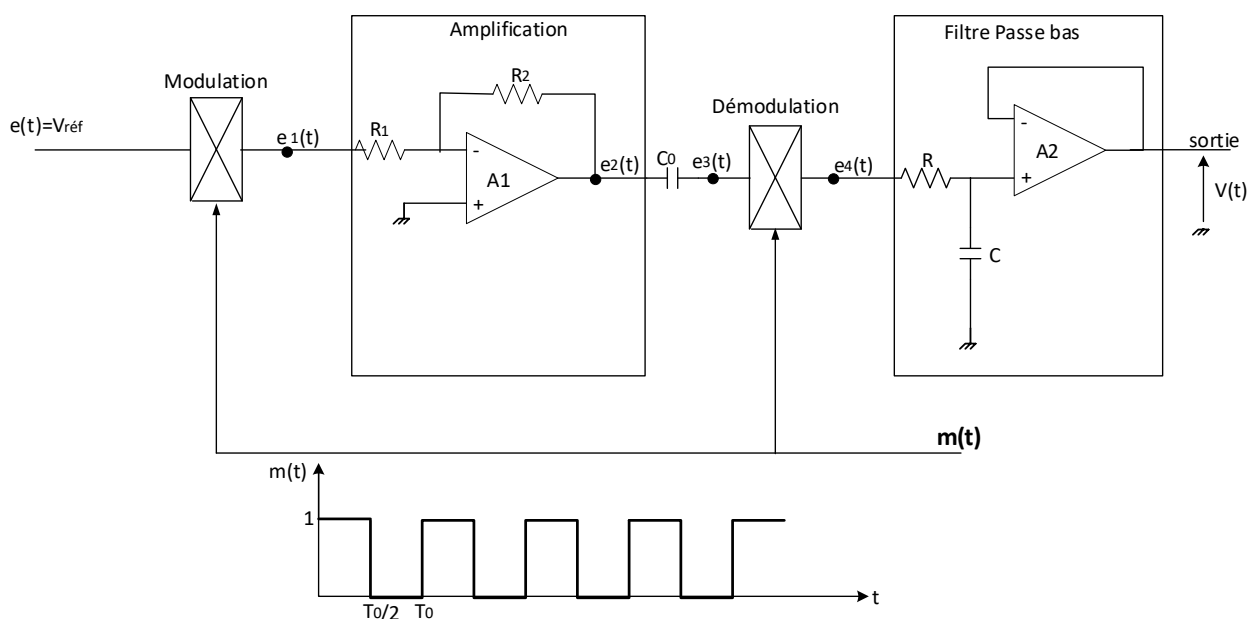


Figure 6 : Schéma de principe d'un amplificateur à découpage

Modulation

B.1.1. Représenter la forme d'onde du signal $e_1(t)$.

B.1.2. En exploitant la décomposition en série de Fourier (DSF Annexe 2) montrer que le signal $e_1(t)$ peut s'écrire par l'expression suivante :

$$e_1(t) = e(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega_0 t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega_0 t + \dots \right]$$

Amplification.

La figure 7 représente le montage équivalent d'un inverseur présentant les tensions de décalage v_{os} et de dérive Δv_{os} supposées constantes.

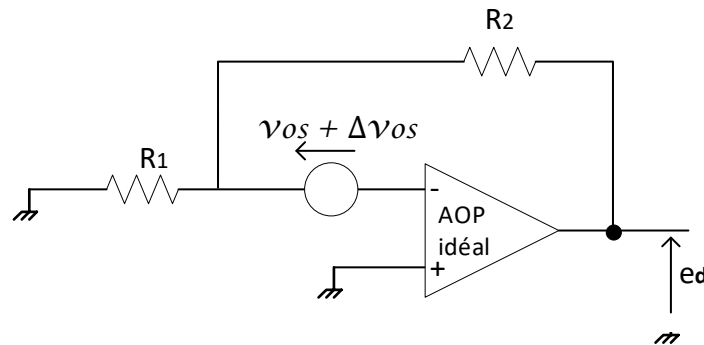


Figure 7

Supposons que v_{os} est la tension de décalage à l'entrée et Δv_{os} est la tension de dérive due à la température de l'amplificateur **A1**.

B.1.3. Montrer que l'expression de $e_d = k \cdot v_{os} + k \cdot \Delta v_{os}$, Trouvez l'expression de k .

La bande passante de **A1** est étroite pour éliminer les harmoniques de $e_1(t)$.

B.1.4. Montrer que l'expression du signal $e_2(t) = -K_1 e(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega_0 t \right] + k \cdot v_{os} + k \cdot \Delta v_{os}$ Trouvez l'expression de K_1 .

B.1.5. La capacité de liaison C_0 permet de bloquer la composante continue, déduire l'expression de $e_3(t)$.

Démodulation

B.1.6. Trouver l'expression du signal $e_4(t)$.

B.1.7. Sachant que le filtre passe-bas RC atténue tous les signaux fréquents et ne garde que la composante continue de $e_4(t)$, donner l'expression de la tension de sortie $V(t)$.

C. Chaîne de réception Rx

La chaîne de réception de la figure 8 est composée d'un amplificateur différentiel à transimpédance qui convertit le courant de la photodiode en une tension adaptée. La résistance de contre-réaction R_F de l'amplificateur est programmable pour supporter un large intervalle du courant de la photodiode. La lumière provenant des LEDs est réfléchiée par les différents constituants du corps comme (le sang, le tissu, ...) et sont reçue par la photodiode.

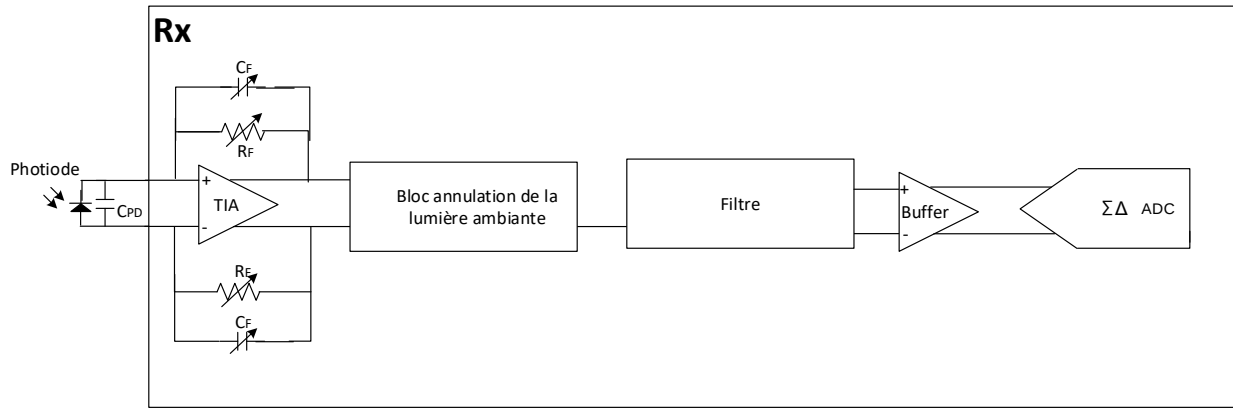


Figure 8 : Bloc fonctionnel de la chaîne de réception Rx

C.1. Etude de la photodiode

La photodiode est un capteur à flux lumineux, elle se comporte comme un générateur du courant où $i = S_d \cdot \varphi$ avec φ est le flux lumineux incident exprimé en W et S_d est la sensibilité propre de la photodiode exprimée en A/W et supposée constante.

Le schéma du circuit électrique équivalent de la photodiode est représenté à la figure 9, où C est la capacité équivalente de sa jonction polarisée en inverse. On suppose que le flux incident $\varphi = \varphi_0 + \varphi_I \cos \omega \cdot t$, a une composante continue φ_0 et une composante variable en fonction du temps.

On choisit comme mesurande l'amplitude φ_I de la composante variable de φ et comme grandeur de sortie l'amplitude V_I de la composante alternative de la tension v apparaissant aux bornes de la résistance de polarisation R .

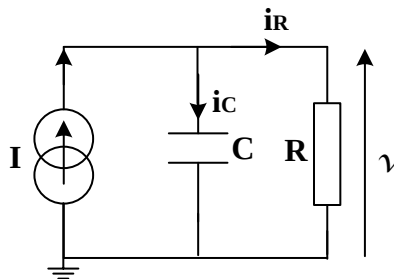


Figure 9 : Circuit électrique équivalent de la photodiode

C.1.1. Montrer que $V_I = \frac{S_d \cdot R}{1 + jRC\omega} \varphi_I$.

On pose $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ la fréquence de coupure du montage.

C.1.2. Exprimer l'amplitude V_I en fonction de S_d , φ_I , R , f_c et f .

C.1.3. Exprimer la sensibilité $S(f)$ de la photodiode en fonction de S_d , f_c et f .

C.1.4. Déterminer la sensibilité de la photodiode en régime statique.

C.1.5. Déterminer la sensibilité de la photodiode pour les fréquences f_c , $2f_c$ et $10f_c$.

La cellule de détection utilisée dans la chaîne de réception est SFH7050-OSRAM (Annexe 3).

C.1.6. Compléter le tableau du document réponse C.1.6 pour $C = 5pF$ et $R = 180K\Omega$.

C.2. Amplificateur à Transimpédance TIA (convertisseur courant-tension)

Le TIA amplificateur à transimpédance est un convertisseur courant-tension, basé sur l'utilisation d'un amplificateur différentiel à transconductance OTA avec une contre-réaction négative. Le premier étage du TIA convertit le courant de la photodiode PD en une tension de sortie différentielle (Figure 10).

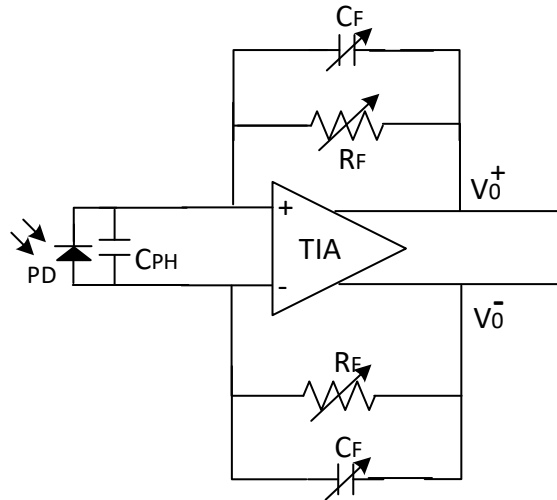


Figure 10: Circuit TIA

On considère le montage de la figure 11.

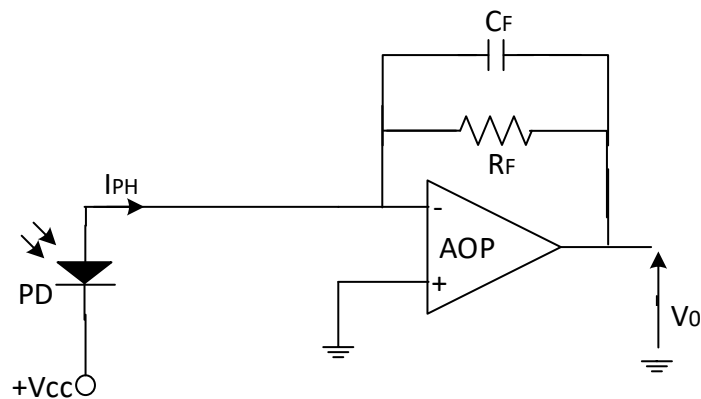


Figure 11: Convertisseur courant-tension

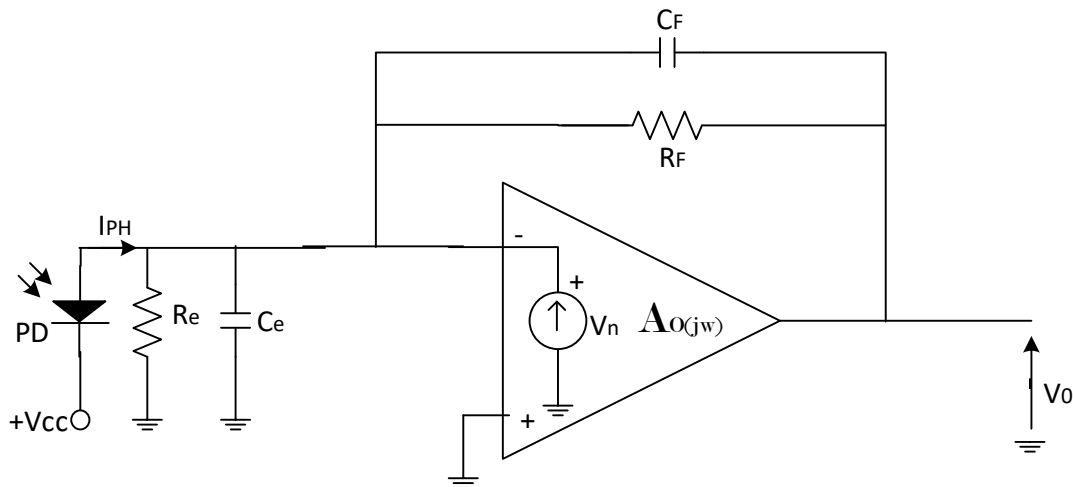
C.2.1. On suppose que l'AOP est idéal, calculer la fonction de transfert équivalente $T(jf) = \frac{V_0}{I_{PH}}(jf)$.

C.2.2. Trouver l'expression de la phase θ de $T(jf)$.

Pour étudier l'effet du bruit sur la stabilité du TIA (TIA Noise) on ajoute une source de tension V_n à l'amplificateur à transimpédance TIA, la structure du montage de la figure 12, représente un schéma modifié du convertisseur courant-tension. Elle est constituée par un réseau de contre-réaction R_f, C_f et un réseau d'entrée R_e, C_e .

R_e : Représente la résistance d'entrée équivalente du montage, avec $R_e = R_{CM} // R_{DM} // R_{PH}$ (R_{CM} et R_{DM} représentent respectivement les résistances en mode commun et différentiel de l'AOP et R_{PH} représente la résistance de la photodiode).

C_e : Représente la capacité d'entrée équivalente du montage, avec $C_e = C_{CM} + C_{DM} + C_{PH}$ (C_{CM} et C_{DM} représentent respectivement les capacités en mode commun et différentiel de l'AOP et C_{PH} représente la capacité de la photodiode).



12: Convertisseur courant-tension avec imperfection

Figure

Sachant que :

$A_0(j\omega)$ représente l'amplification en boucle ouverte de l'AOP.

β représente le facteur de contre réaction du montage, il est égale à $\frac{1}{1 + \frac{Z_{IN}(j\omega)}{Z_{BF}(j\omega)}}$.

Avec $Z_{IN}(j\omega)$ impédance complexe d'entrée.

$Z_{BF}(j\omega)$ Impédance complexe de contre réaction.

C.2.3. Ecrire l'expression de la fonction de transfert du bruit (Noise Gain) $NG(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_n(j\omega)}$ en fonction de $Z_{IN}(j\omega)$ et $Z_{BF}(j\omega)$.

C.2.4. Montrer que $V_o(j\omega) = \frac{R_f + R_e}{R_e} \cdot \frac{1 + \frac{R_f R_e}{R_f + R_e} (C_f + C_e) j\omega}{1 + j R_f C_f \omega} V_n$

On considère que $R_e \gg R_f$.

C.2.5. Ecrire une approximation de $V_o(j\omega)$.

C.2.6. On note f_z la fréquence relative au zéro de la fonction de transfert du bruit $NG(j\omega)$, trouver l'expression de cette fréquence.

C.2.7. On note f_p la fréquence relative au pôle de la fonction de transfert du bruit $NG(j\omega)$, trouver l'expression de cette fréquence.

C.3. Amplificateur à Transconductance OTA

La figure 13 représente une implémentation de l'amplificateur opérationnel de transconductance différentielle simple OTA (structure de base) avec deux sorties, une pour chaque branche. La première branche est composée par les transistors MOS M1 et M3, La deuxième branche est composée par M2 et M4. Les deux branches sont polarisées par le transistor M7.

Pour les tensions d'entrée V_{in1} et V_{in2} , correspondent respectivement les courants de sorties I_0^- et I_0^+ .

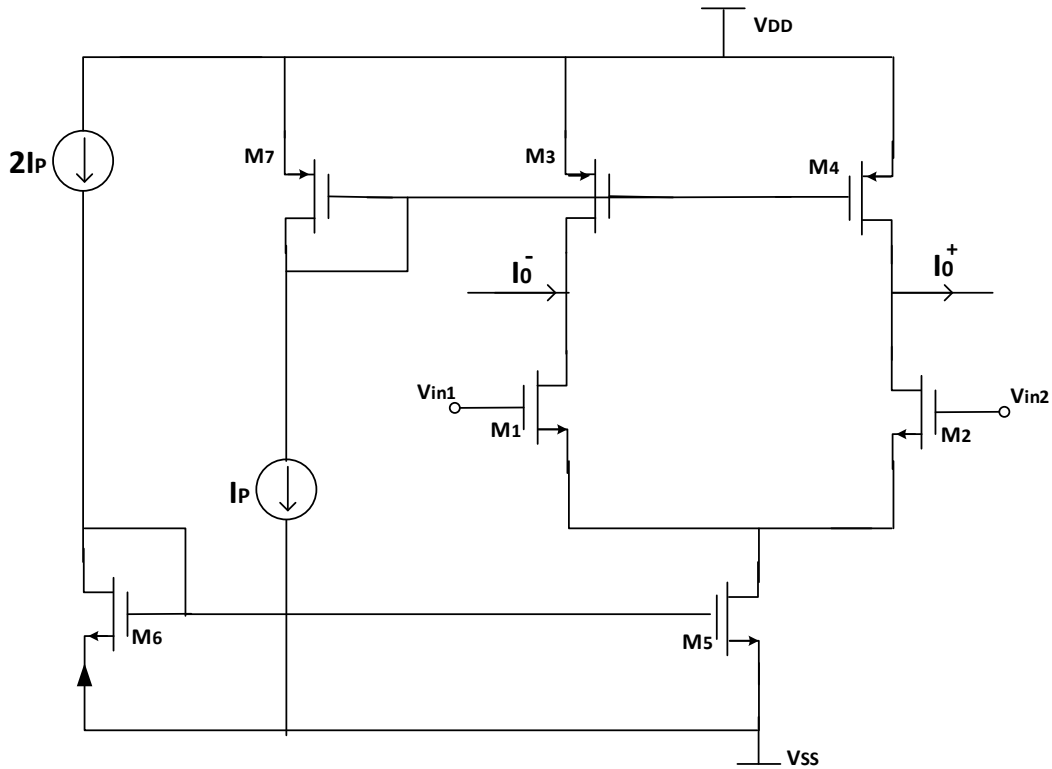


Figure 13 : Amplificateur différentiel de transconductance simple

En ajoutant une capacité C entre les nœuds de sorties V_{out}^+ et V_{out}^- , le modèle équivalent de l'OTA différentiel en mode AC est donné par la figure 14.

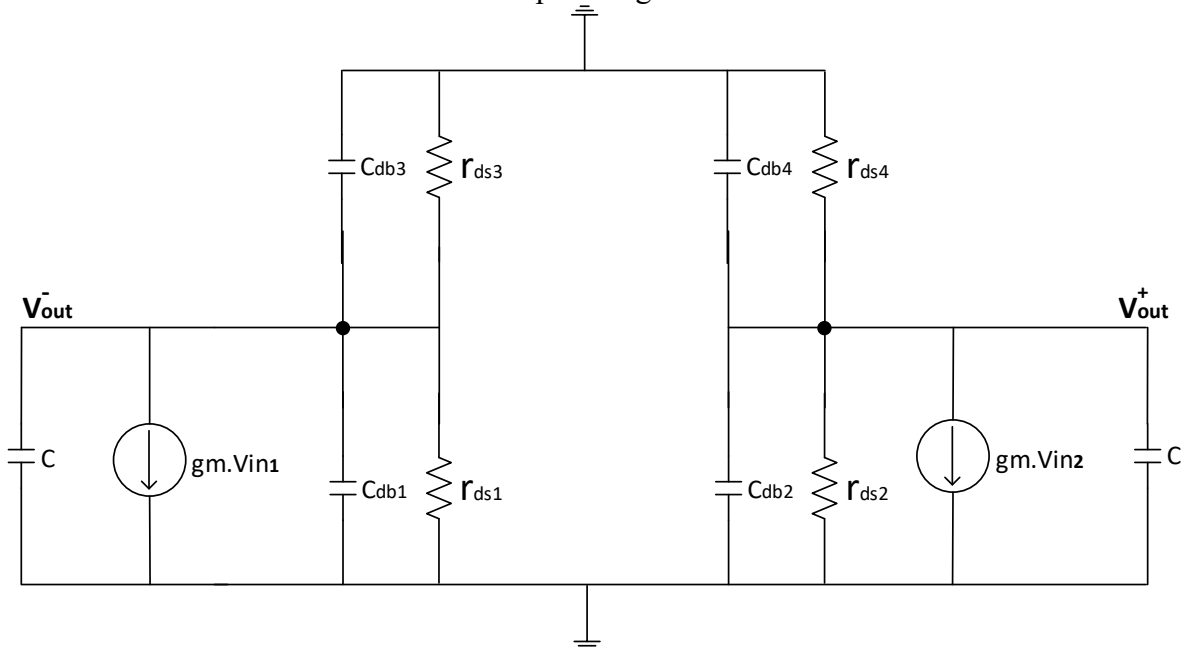


Figure 14 : modèle petit signal de l'OTA

On considère que les transistors M_1, M_2, M_3 et M_4 sont identiques.

C.3.1. Justifier l'utilisation de la simplification $g_0 = \frac{1}{r_{ds1}} + \frac{1}{r_{ds3}} = \frac{1}{r_{ds2}} + \frac{1}{r_{ds4}}$

$$C_p = C_{db1} + C_{db3} = C_{db2} + C_{db4}$$

Sachant que $V_{out} = V_{out}^+ - V_{out}^-$ et $V_{in} = V_{in2} - V_{in1}$.

C.3.2. Montrer que la fonction de transfert $F(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{g_m}{g_0 + j\omega(C + C_p)}$.

C.3.3. Donner l'expression du gain statique G et la fréquence de coupure f_c .

C.3.4. Quel est l'effet de la capacité parasite C_p sur le montage.

D. Conversion analogique numérique (ADC)

La figure 15 illustre le schéma synoptique général d'un ADC, Il se compose essentiellement d'un filtre anti-repliement, d'un échantillonneur, d'un quantificateur et d'un codeur. Le filtre anti-repliement a été étudié dans la partie C.



Figure 15

D.1. Etude de l'échantillonnage

L'échantillonnage est modélisé par le produit du signal à échantillonner $x(t)$ avec une fonction peigne $p(t)$, représentée par une suite d'impulsion de Dirac δ .

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_e t}$$

Où $T_e = \frac{1}{f_e}$, représente la période d'échantillonnage.

Notons par $x_e(t)$ le signal échantillonné.

Nous rappelons la propriété de décalage fréquentiel :

$$s(t)e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow S(f - f_0)$$

D.1.1. Donner l'expression analytique du signal échantillonné $x_e(t)$.

D.1.2. Donner alors l'expression de la transformée de Fourier $X_e(f)$.

D.1.3. Représenter sur le document réponse D.1.3, le spectre de $X_e(f)$. (f_B représente la fréquence limite supérieure du spectre du signal $x(t)$, tandis que f_e représente la fréquence d'échantillonnage).

Le filtre anti-repliement limite le signal d'entrée à la fréquence $f_B = 20\text{Hz}$.

D.1.4. Quelle sera alors la fréquence d'échantillonnage minimale.

D.2. Quantificateur uniforme N bits

L'erreur de quantification d'un ADC peut être approximée par une forme d'onde en dents de scie ayant une amplitude crête à crête d'un pas de quantification (noté q).

Pour un quantificateur N bits et une tension de pleine échelle V_{FS} .

D.2.1. Donner l'expression du pas de quantification q .

D.2.2. Pour $N = 16$ bits et $V_{FS} = 2\text{V}$, Calculer la valeur de q .

L'erreur de quantification en fonction du temps est représentée dans la Figure 16.

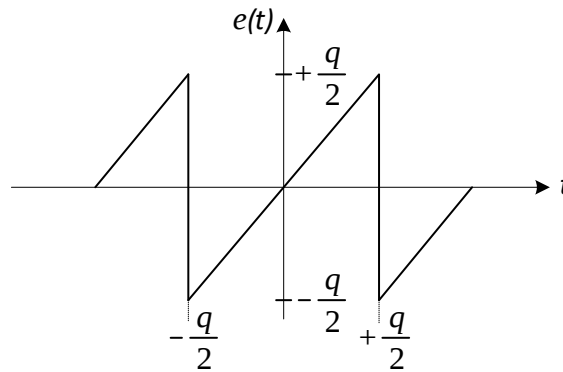


Figure 16

La puissance de bruit de quantification est donnée par la formule suivante :

$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^2(t) dt$$

D.2.3. Montrer que $\sigma^2 = \frac{q^2}{12}$.

La puissance du bruit de quantification est répartie uniformément dans la plage de fréquence $\left[-\frac{f_e}{2}, +\frac{f_e}{2}\right]$. Sa densité spectrale $S_b(f) = \frac{q^2}{12f_e}$

D.2.4. Pour $N = 16, V_{FS} = 2V$ et $f_e = 40\text{Hz}$, représenter la densité spectrale de puissance $S_b(f)$ sur le document réponse D.2.4.

Par définition le rapport signal sur bruit de quantification s'écrit :

$$SNR_{dB} = 20 \times \log \left(\frac{\text{Valeur efficace de l'entrée pleine échelle}}{\text{Valeur efficace du bruit de quantification}} \right)$$

Considérons pour le calcul du SNR, un signal d'entrée sinusoïdal $x(t) = \frac{V_{FS}}{2} \sin(\omega t)$.

D.2.5. Montrer alors $SNR_{dB} \approx 6,02N + 1,76$.

D.3. Etude de sur-échantillonnage

Le sur-échantillonnage consiste à échantillonner le signal d'entrée à une fréquence très supérieur à la fréquence de Nyquist ($f_e = 2f_B$). Soit f_s la fréquence de sur-échantillonnage.

Le rapport OSR "Over Sampling Rate" est définie par :

$$OSR = \frac{f_s}{f_e} = \frac{f_s}{2f_B}$$

Parmi les avantages du sur-échantillonnage, est d'augmenter le rapport signal sur bruit d'une quantité de $10 \times \log(OSR)$.

D.3.1. Sur le document réponse D.3.1, représenter le spectre du signal échantillonné à la fréquence f_s .

D.3.2. Représenter sur le document réponse D.3.2 la densité spectrale de puissance de bruit de quantification, pour $N = 16\text{bits}$, $V_{FS} = 2V$ et $f_s = 20,48\text{kHz}$.

D.4. Etude du Convertisseur analogique numérique sigma-delta

Ce type d'ADC est utilisé dans les systèmes de mesure de précision ; il permet d'obtenir une très haute résolution de quantification (20 bits et plus). Il utilise un modulateur sigma-delta générant un signal numérique d'un "1" bit à très haute cadence (fréquence f_s). Un ADC sigma-delta est constitué principalement d'un modulateur sigma-delta et d'un décimateur. Le schéma de principe du premier ordre d'un ADC sigma-delta est donné à la figure 17.

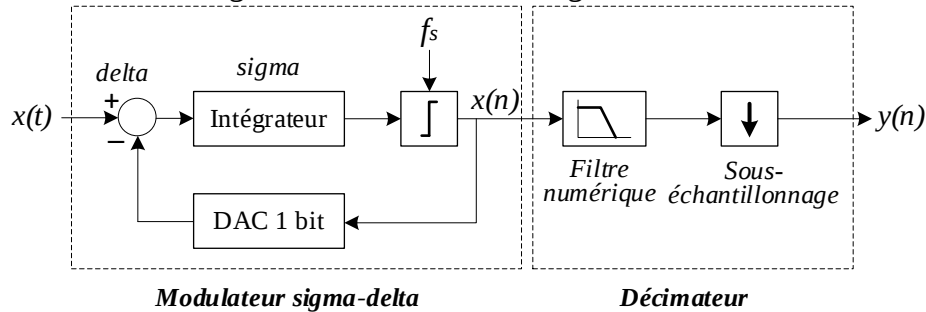


Figure 17

Un modulateur sigma-delta du 1^{er} ordre peut être modélisé par le schéma bloc de la figure 18. Le signal $E(z)$ symbolise le bruit de quantification généré par le comparateur qui agit comme un quantificateur à deux niveaux (résolution d'un seul bit).

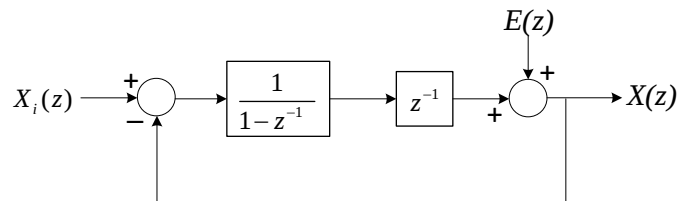


Figure 18

D.4.1. Exprimer la réponse du modulateur sous la forme $X(z) = H(z)X_i(z) + H_q(z)E(z)$.

Nous rappelons que : $z = e^{pT_s} = e^{j\omega T_s} = e^{j\Omega}$ et $e^{j\Omega_1} - e^{j\Omega_2} = 2j \times e^{j(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2})} \times \sin\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}\right)$

D.4.2. Déterminer analytiquement la réponse fréquentielle $H_q(e^{j\Omega})$.

Notons $H_q(e^{j\Omega}) = H_q\left(e^{j2\pi\frac{f}{f_s}}\right)$ par $H_q(f)$.

D.4.3. En déduire le module $|H_q(f)|$ en fonction de f .

Le modulateur sigma-delta du 2^{ème} ordre peut être modélisé par le schéma bloc de la figure 19.

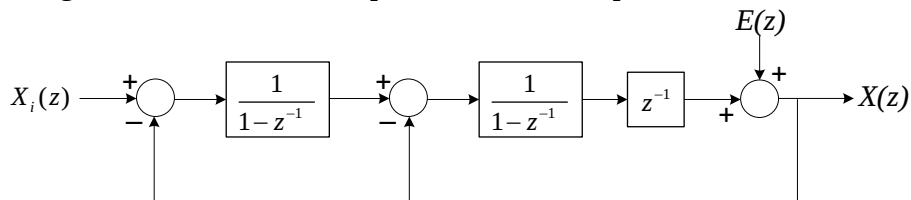


Figure 19

D.4.4. Exprimer la réponse du modulateur sous la forme $X(z) = H(z)X_i(z) + H_q(z)E(z)$.

D.4.5. Déterminer analytiquement la réponse fréquentielle $H_q(f)$.

D.4.6. En déduire le module $|H_q(f)|$ en fonction de f .

La densité spectrale de puissance du bruit de quantification est donnée par :

$$S_b(f) = S_e(f) \times |H_q(f)|^2 \quad \text{avec} \quad S_e(f) = \frac{q^2}{6f_s}$$

D.4.7. Pour $N = 16 \text{ bits}$, $V_{FS} = 2V$ et $f_s = 20,48 \text{ kHz}$, exprimer $S_b(f)$ en fonction de f .

D.4.8. Calculer les valeurs de $S_b(f)$ pour $f = f_B = 20 \text{ Hz}$ et $f = \frac{f_s}{2} = 10,24 \text{ kHz}$.

D.4.9. Esquisser la courbe de $S_b(f)$ sur le document réponse D.4.9.

D.4.10. Comparer les trois courbes de la densité spectrale de puissance de bruit de quantification ($S_b(f)$) et Conclure.

D.5. Décimation

Le filtrage du bruit qui pourrait être replié dans la bande passante est l'objectif principal de l'étage de filtrage numérique. Son objectif secondaire est de prendre le flux de données 1 bit qui a un taux d'échantillonnage élevé et de le transformer en un flux de données N bits à un taux d'échantillonnage inférieur. Ce processus est connu sous le nom de décimation. Essentiellement, la décimation est à la fois une fonction de filtrage et de réduction de débit. La décimation est réalisée par la mise en série de deux filtres. Le premier est un filtre en peigne (ou CIC : cascaded integrator-comb-filter) avec une forte décimation. Le second est généralement un filtre RIF (filtre à réponse impulsionnelle finie). Nous limitons l'étude au filtre en peigne (Comb-Filter). Le filtre en peigne effectue une moyenne glissante sur R échantillons suivi d'une décimation d'un facteur R .

La figure 20 illustre le schéma bloc du filtre en peigne.

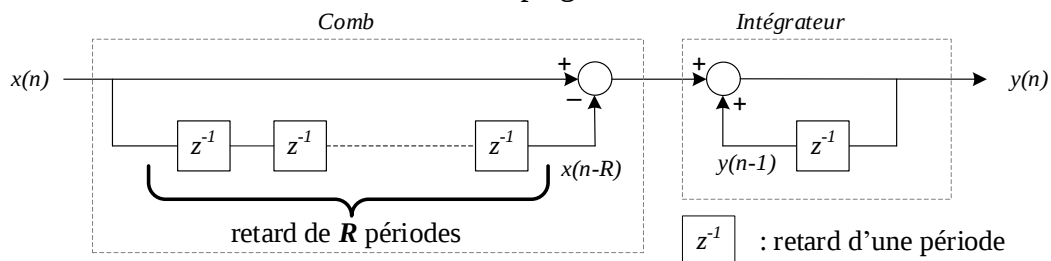


Figure 20

La section constituée de la ligne à retard et du soustracteur est appelée « Comb », la partie récursive est appelée « intégrateur ». Omettons pour le moment la division par R (calcul de moyenne).

D.5.1. Montrer que $y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-R)$.

D.5.2. Déduire la sortie $Y(z)$ ainsi que sa fonction de transfert $T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

D.5.3. Montrer que c'est l'équivalent d'un filtre RIF d'ordre R . Exprimer alors la sortie $y(n)$ sous la forme non récursive.

D.5.4. Quel avantage peut-on tirer de l'implémentation d'un filtre en peigne ?

Pour la décimation, le bloc intégrateur précède le Comb (Figure 21).

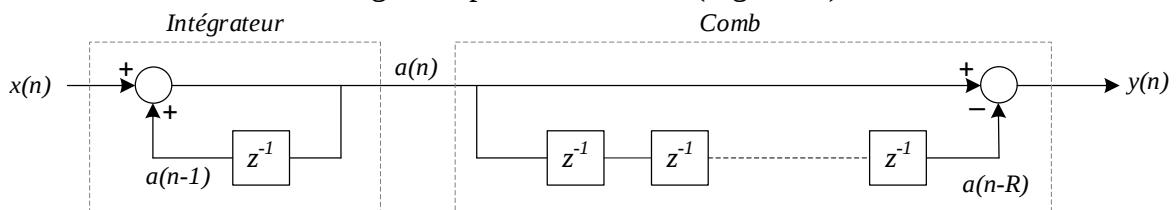


Figure 21

D.5.5. Montrer sans passer par la transformée en z , que les deux structures ont la même réponse $y(n)$.

La décimation consiste à diviser la fréquence d'échantillonnage par R (sous-échantillonnage).

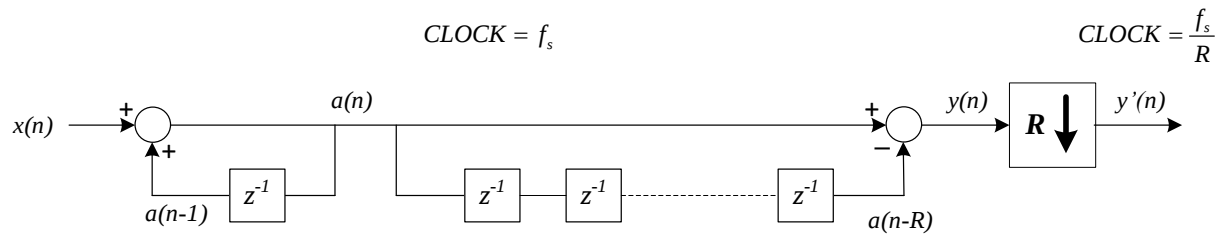


Figure 22

Le sous-échantillonneur à droite supprime $(R - 1)$ échantillons sur R , le débit de sortie $y'(n)$, est $1/R$ du débit d'entrée $x(n)$. Cette solution élimine $\frac{R-1}{R} \%$ des valeurs calculées. Pour remédier à cet inconvénient, déplaçons le rapport de décimation entre l'intégrateur et le Comb (Figure 23).

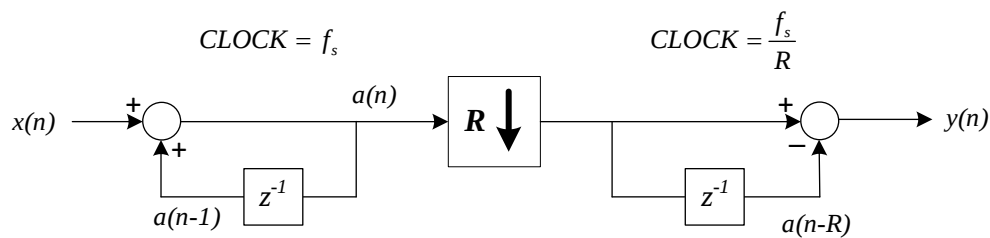


Figure 23

Avec cette structure assez économique, le bloc intégrateur est exécuté à chaque cycle d'horloge, tandis que le bloc Comb est exécuté après R cycles d'horloge.

D.5.6. Montrer que la structure de la figure 22 est équivalente à celle de la figure 23. Pour faciliter le développement, prendre $R = 4$, calculer $y(3)$ et $y(7)$ pour les deux structures.

D.5.7. Rappeler sa fonction de transfert $T(z)$ en introduisant le rapport de moyennage.

Dans la pratique, on utilise plusieurs filtres moyenneurs en cascade afin de réduire fortement la puissance du bruit de quantification aux fréquences supérieures à $\frac{f_s}{R}$.

La figure 24 illustre le filtre CIC de troisième ordre et ayant un rapport de décimation $R = 16$.

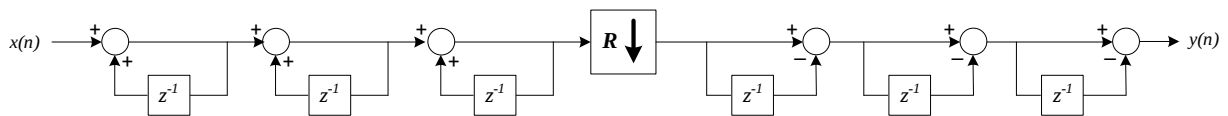


Figure 24

D.5.8. Donner sa fonction de transfert $T_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

D.5.9. Déterminer sa réponse fréquentielle $T_3(f)$.

D.5.10. Pour $f_B = 20\text{Hz}$ et $f_s = 20,48\text{kHz}$, calculer $|T_3(f_B)|$, $|T_3(\frac{f_s}{16})|$ et $|T_3(\frac{3f_s}{16})|$. Conclure.