

République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Direction Générale des Etudes Technologiques

*Concours de Recrutement des Technologues Spécialité : Génie Electrique
Session 2020*

**Corrigé de
Epreuve de Technologie : Partie Electronique**

A. Principe physique de mesure

A.1.1. Calculer les absorbances $A(\lambda_1)$ et $A(\lambda_2)$.

En utilisant les expressions données $A(\lambda) = -\log_{10}(T) = \varepsilon(\lambda).c.d$

$$T = \frac{I}{I_0} = 10^{-\varepsilon(\lambda).c.d}$$

Pour λ_1 $T_1 = \frac{I_1}{I_{01}} = 10^{-(\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r).d}$

Pour λ_2 $T_2 = \frac{I_2}{I_{02}} = 10^{-(\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r).d}$

Alors $\begin{cases} A(\lambda_1) = -\log T_1 = (\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r).d \\ A(\lambda_2) = -\log T_2 = (\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r).d \end{cases}$

On définit le rapport $R = \frac{A(\lambda_1)}{A(\lambda_2)}$, avec $A(\lambda_1)$ et $A(\lambda_2)$ représentent respectivement les absorbances pour les longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 .

A.1.2. Montrer que $R = \frac{\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r}{\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r}$.

Sachant que $R = \frac{A(\lambda_1)}{A(\lambda_2)} = \frac{(\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r).d}{(\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r).d} = \frac{\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r}{\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r}$

En déduire.

A.1.3. En déduire que la concentration de l'hémoglobine réduite

En partant de $R = \frac{\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r}{\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r} \leftrightarrow R.(\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r) = (\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r)$
 $\leftrightarrow R.\varepsilon_{02}c_0 + R.\varepsilon_{r2}c_r = (\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r)$
 $\leftrightarrow c_0(R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}) = c_r(\varepsilon_{r2} - R.\varepsilon_{r2})$

$$c_r = c_0 \cdot \frac{R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}$$

Sachant que la saturation en oxygène $pO_2 = \frac{c_0}{c_0 + c_r}$.

A.1.4. Montrer que la saturation en oxygène $SpO_2 = \frac{R.\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{R.(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{02}) - (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{01})}$.

$$SpO_2 = \frac{c_0}{c_0 + c_0 \cdot \frac{R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}} = \frac{1}{1 + \frac{R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}} = \frac{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2} + R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}$$

$$SpO_2 = \frac{R.\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{R.(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{02}) - (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{01})}$$

A.1.5. A partir des spectres Hb et HbO₂ données en annexe 1, compléter le tableau du document

réponse A.1.5 en précisant les valeurs approchées de ε_{01} , ε_{r1} , ε_{02} et ε_{r2} .

Longueur d'onde λ nm	Coefficients d'absorption (cm^{-1}/M)	
	Hb	HbO ₂
	ε_0	ε_r
$\lambda_1 = 660nm$	$\varepsilon_{r1} = 3227$	$\varepsilon_{01} = 320$
$\lambda_2 = 940nm$	$\varepsilon_{r2} = 694$	$\varepsilon_{r1} = 1214$

A.1.6. Calculer les valeurs du rapport des absorbances R dans les cas suivants :

$$SpO_2 = \frac{694R - 3227}{R(694 - 1214) - (3227 - 320)} = \frac{694R - 3227}{-520R - 2907}$$

$$SpO_2 = 0 \leftrightarrow R = \frac{3227}{694} = 4.64$$

$$SpO_2 = 1 \leftrightarrow R = \frac{320}{1214} = 0.26$$

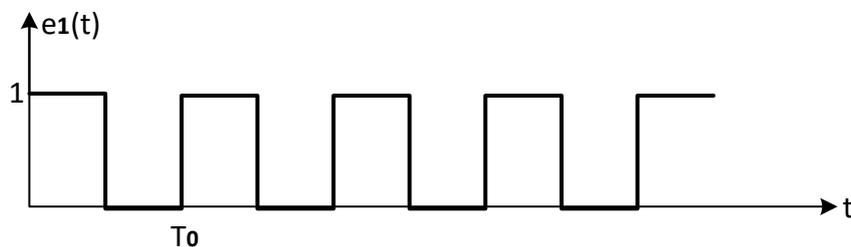
B. Chaine de transmission (Tx)

B.1. Amplificateur à découpage (chopper)

Modulation

B.1.1. Représenter la forme d'onde du signal $e_1(t)$.

Le signal $e_1(t)$ est représenté par la forme d'onde suivante



$$e_1(t) = \begin{cases} V_{réf} & \text{pour } 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{pour } \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

B.1.2. En exploitant la décomposition en série de Fourier (DSF Annexe 2) montrer que le signal $e_1(t)$ peut s'écrire par l'expression suivante :

$$e_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} V_{réf} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} V_{réf} \cdot dt = \frac{V_{réf}}{T_0} [t]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{V_{réf}}{T_0} \text{ alors } a_0 = \frac{V_{réf}}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} V_{réf} \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt = \frac{2V_{réf}}{T_0} \frac{T_0}{2n\pi} \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) \right]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{V_{réf}}{n\pi} [\sin(n\pi) - \sin(0)] = 0$$

Alors $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} V_{réf} \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt = \frac{2V_{réf}}{T_0} \frac{T_0}{2n\pi} \left[-\cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) \right]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{V_{réf}}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 1]$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \text{si } n \text{ paire} & b_n = 0 \\ \text{si } n \text{ impaire} & b_n = \frac{2V_{réf}}{n\pi} \end{cases}$$

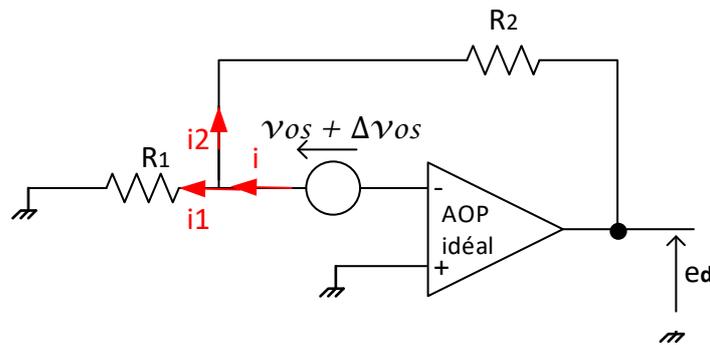
Donc

$$e_1(t) = \frac{V_{réf}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2V_{réf}}{n\pi}$$

$$e_1(t) = e(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots \dots \dots \right)$$

Amplification.

La figure 7 représente le montage équivalent d'un inverseur présentant les tensions de décalage v_{os} et de dérive Δv_{os} supposées constantes.



Supposons que v_{os} est la tension de décalage à l'entrée et Δv_{os} est la tension de dérive due à la température de l'amplificateur **A1**.

B.1.3. Montrer que l'expression de $e_d = k \cdot v_{os} + k \cdot \Delta v_{os}$, Trouvez l'expression de k .

$$\begin{cases} e_d = -R_2 i_2 + R_1 i_1 \\ v_{OS} + \Delta v_{OS} = R_1 i_1 \\ i = i_1 + i_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = -i_2 \\ v_{OS} + \Delta v_{OS} = R_1 i_1 \\ e_d = -R_2 i_2 + R_1 i_1 \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = -i_2 \\ i_1 = \frac{v_{OS} + \Delta v_{OS}}{R_1} \\ e_d = R_2 i_1 + R_1 i_1 \end{cases}$$

$$e_d = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_{os} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \Delta v_{os} \quad \text{avec} \quad k = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

La bande passante de **A1** est étroite pour éliminer les harmoniques de $e_1(t)$.

B.1.4. Montrer que l'expression du signal $e_2(t) = -K_1 e(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega_0 t \right] + k \cdot v_{os} + k \cdot \Delta v_{os}$ Trouvez l'expression de K_1 .

$$e_2(t) = -e_1(t) \frac{R_2}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots \dots \dots \right)$$

L'AOP présente une bande passante étroite pour éliminer les harmoniques de $e_1(t)$ donc

$$e_2(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Sachant que la tension de décalage $e_d(t)$ s'ajoute à la sortie alors

$$e_2(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) \right) + k \cdot v_{os} + k \cdot \Delta v_{os}$$

$$\text{Avec } K_1 = -\frac{R_2}{R_1}$$

B.1.5. La capacité de liaison C_0 permet de bloquer la composante continue, déduire l'expression de

$e_3(t)$.

A partir de l'expression trouvée

$$e_2(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) \right) + k \cdot v_{os} + k \cdot \Delta v_{os}$$

On trouve

$$e_3(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left(\frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Démodulation

B.1.6. Trouver l'expression du signal $e_4(t)$.

$$e_4(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left(\frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) \right) \cdot e_1(t)$$

$$e_4(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left(\frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

$$e_4(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left(\frac{1}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{4}{\pi^2} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi} \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \sin(\omega_0 t) \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

$$e_4(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left[\frac{1}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2} + \frac{2}{3\pi^2} \cdot \frac{\cos(2\omega_0 t) - \cos(4\omega_0 t)}{2} + \frac{2}{5\pi^2} \cdot \frac{\cos(4\omega_0 t) - \cos(6\omega_0 t)}{2} + \dots \right]$$

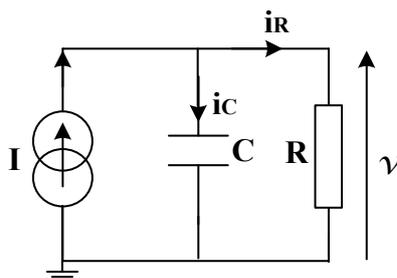
$$e_4(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \left[\frac{1}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2} \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3\pi^2} \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{3\pi^2} \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5\pi^2} \cos(4\omega_0 t) - \frac{1}{5\pi^2} \cos(6\omega_0 t) + \dots \right]$$

B.1.7. Sachant que le filtre passe-bas RC atténue tous les signaux fréquentiels et ne garde que la composante continue de $e_4(t)$, donner l'expression de la tension de sortie $V(t)$.

Le filtre passe-bas ne garde que la composante continue alors $v(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t) \frac{2}{\pi^2}$

C. Chaîne de réception Rx

C.1. Etude de la photodiode



C.1.1. Montrer que $V_I = \frac{S_d R}{1 + jRC\omega} \phi_I$.

$$V_I = Z \cdot I \quad \text{avec} \quad Z = \frac{R \cdot \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$V_I = Z \cdot I = \frac{R}{1 + jRC\omega} I$$

$$I = Z \cdot I = \frac{S_d \cdot R}{1 + jRC\omega} \Phi_I$$

On pose $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ la fréquence de coupure du montage.

C.1.2. Exprimer l'amplitude V_I en fonction de S_d , Φ_I , R , f_c et f .

$$V_I = Z \cdot I = \frac{RS_d}{1 + j2\pi RC\omega} \Phi_I$$

C.1.3. Exprimer la sensibilité $S(f)$ de la photodiode en fonction de S_d , f_c et f .

$$|V_I| = \frac{RS_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \Phi_I$$

$$S(f) = \frac{dI}{d\Phi_I} = \frac{S_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

C.1.4. Déterminer la sensibilité de la photodiode en régime statique.

$$S(0) = \frac{RS_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{0}{f_c}\right)^2}} = \frac{S_d}{\sqrt{1}}$$

C.1.5. Déterminer la sensibilité de la photodiode pour les fréquences f_c , $2f_c$ et $10f_c$.

$$S(f_c) = \frac{S_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2}} = \frac{S_d}{\sqrt{2}}$$

$$S(2f_c) = \frac{S_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{2f_c}{f_c}\right)^2}} = \frac{S_d}{\sqrt{5}}$$

$$S(10f_c) = \frac{S_d}{\sqrt{1 + \left(\frac{10f_c}{f_c}\right)^2}} = \frac{S_d}{\sqrt{101}}$$

La cellule de détection utilisée dans la chaîne de réception est **SFH7050-OSRAM (Annexe 3)**.

C.1.6. Compléter le tableau du document réponse C.1.6 pour $C = 5\text{pF}$ et $R = 180\text{K}\Omega$.

	$\lambda_1 = 660 \text{ nm}$	$\lambda_2 = 940 \text{ nm}$
--	------------------------------	------------------------------

Sensibilité (A/W)	0.47	0.77
$S(0)$	0.47	0.77
$S(f_c)$	0.33	0.54
$S(2f_c)$	0.21	0.34
$S(10f_c)$	0.046	0.076

C.2. Amplificateur à Transimpédance TIA (convertisseur courant-tension)

C.2.1. On suppose que l'AOP est idéal, calculer la fonction de transfert équivalente $T(jf) = \frac{V_0}{I_{PH}}(jf)$.

$$V_0 = -Z_F I_{PH}$$

$$T(jf) = \frac{V_0}{I_{PH}} = -Z_F = -\frac{R_F \times \frac{1}{j2\pi C_F f}}{R_F + \frac{1}{j2\pi C_F f}} \text{ alors } T(jf) = -\frac{R_F}{1 + j2\pi R_F C_F f}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_F C_F}; \quad T(jf) = -\frac{R_F}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$

C.2.2. Trouver l'expression de la phase θ de $T(jf)$.

$$\theta = \pi - \text{Arctan}\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

C.2.3. Montrer que $V_0(j\omega) = \frac{R_f + R_e}{R_e} \cdot \frac{1 + \frac{R_f R_e}{R_f + R_e} (C_f + C_e) j\omega}{1 + jR_f C_f \omega} V_n$

$$V_0 + Z_{BF} I_{IN} - V_n = 0$$

$$V_n = -Z_{IN} I_{IN} \Rightarrow I_{IN} = -\frac{V_n}{Z_{IN}}$$

$$V_0 - Z_{BF} \frac{V_n}{Z_{IN}} - V_n = 0 \Leftrightarrow V_0 = \left(\frac{Z_{BF}}{Z_{IN}} + 1\right) V_n$$

$$\text{Alors } NG(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{V_n(j\omega)} = 1 + \frac{Z_{BF}(j\omega)}{Z_{IN}(j\omega)}$$

On considère que $R_e \gg R_f$.

C.2.4. Ecrire une approximation de $V_0(j\omega)$.

$$V_0(j\omega) = NG(j\omega) \cdot V_n(j\omega) = \left(1 + \frac{Z_{BF}(j\omega)}{Z_{IN}(j\omega)}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(1 + \frac{\frac{R_F}{1 + jR_F C_F \omega}}{\frac{R_e}{1 + jR_e C_e \omega}}\right) \cdot V_n(j\omega) = \left(1 + \frac{\frac{R_F}{1 + jR_F C_F \omega}}{\frac{R_e}{1 + jR_e C_e \omega}}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(1 + \frac{R_F}{R_e} \frac{1 + jR_F C_F \omega}{1 + jR_e C_e \omega}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(\frac{R_e (1 + jR_F C_F \omega) + R_F (1 + jR_e C_e \omega)}{R_e (1 + jR_F C_F \omega)}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(\frac{R_e + R_F + R_e R_F (C_e + C_F) j\omega}{R_e (1 + jR_F C_F \omega)}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(\frac{R_e + R_F}{R_e} \cdot \frac{1 + \frac{R_e R_F}{R_e + R_F} (C_e + C_F) j\omega}{1 + jR_F C_F \omega}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

C.2.5. On note f_z la fréquence relative au zéro de la fonction de transfert du bruit $NG(j\omega)$, trouver l'expression de cette fréquence.

$$f_z = \frac{1}{2\pi R_F C_F}$$

C.2.6. On note f_p la fréquence relative au pôle de la fonction de transfert du bruit $NG(j\omega)$, trouver l'expression de cette fréquence.

$$f_p = \frac{1}{2\pi R_F (C_e + C_F)}$$

C.3. Amplificateur à Transconductance OTA

On considère que les transistors M_1, M_2, M_3 et M_4 sont identiques.

C.3.1. Justifier l'utilisation de la simplification $g_0 = \frac{1}{r_{ds1}} + \frac{1}{r_{ds3}} = \frac{1}{r_{ds2}} + \frac{1}{r_{ds4}}$

$$C_p = C_{db1} + C_{db3} = C_{db2} + C_{db4}$$

Les résistances et les capacités de chaque branche sont montées en parallèle. De plus les transistors sont identiques. D'où g_0 représente la conductance équivalente de chaque branche et C_p la capacité équivalente de chaque branche.

Sachant que $V_{out} = V_{out}^+ - V_{out}^-$ et $V_{in} = V_{in2} - V_{in1}$.

C.3.2. Montrer que la fonction de transfert $F(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{g_m}{g_0 + j\omega(C + C_p)}$.

$$-g_m V_{in1} = g_0 V_{out}^- + (C_p + C)pV_{out}^-$$

$$-g_m V_{in2} = g_0 V_{out}^+ + (C_p + C)pV_{out}^+$$

$$-g_m (V_{in2} - V_{in1}) = (g_0 + (C_p + C)p)(V_{out}^+ - V_{out}^-)$$

$$\text{Alors } F(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{g_m}{g_0 + p(C_p + C)} = \frac{g_m}{g_0 + j\omega(C_p + C)}$$

$$F(p) = \frac{\frac{g_m}{g_0}}{1 + j\omega \frac{(C_p + C)}{g_0}}$$

C.3.3. Donner l'expression du gain statique G et la fréquence de coupure f_c .

$$\text{Le gain statique } G = \frac{g_m}{g_0}$$

$$f_c = \frac{g_0}{2\pi(C_p + C)}$$

C.3.4. Quel est l'effet de la capacité parasite C_p sur le montage.

La capacité parasite modifie la fréquence de coupure.

D. Conversion analogique numérique (ADC)

D.1. Etude de l'échantillonnage

D.1.1. Donner l'expression analytique du signal échantillonné $x_e(t)$.

$$x_e(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e} x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_e t}$$

D.1.2. Donner alors l'expression de la transformée de Fourier $X_e(f)$.

D'après la propriété de décalage fréquentiel :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_e)$$

D.1.3. Représenter sur le document réponse D.1.3, le spectre de $X_e(f)$. (f_B représente la fréquence limite supérieure du spectre du signal $x(t)$, tandis que f_e représente la fréquence d'échantillonnage).

Voir document réponse A.1.3

D.1.4. Quelle sera alors la fréquence d'échantillonnage minimale.

$$f_B = 20\text{Hz} \Rightarrow f_{e_{\min}} = 2f_B = 40\text{Hz} \quad (\text{d'après le théorème de Shannon})$$

D.2. Quantificateur uniforme N bits

D.2.1. Donner l'expression du pas de quantification q .

$$q = \frac{V_{FS}}{2^N}$$

D.2.2. Pour $N = 16$ bits et $V_{FS} = 2V$, Calculer la valeur de q .

$$\text{A. N. } q = \frac{2}{2^{16}} = 30,517 \mu V$$

D.2.3. Montrer que $\sigma^2 = \frac{q^2}{12}$.

$$\sigma^2 = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^2(t) dt = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} t^2 dt = \frac{1}{3q} [t^3]_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} = \frac{1}{3q} \frac{2q^3}{2^3} = \frac{q^2}{12}$$

D.2.4. Pour $N = 16$, $V_{FS} = 2V$ et $f_e = 40\text{Hz}$, représenter la densité spectrale de puissance $S_b(f)$ sur le document réponse D.2.4.

$$S_b(f) = \frac{(30,517 \cdot 10^{-6})^2}{12 \times 40} = 2,07 \cdot 10^{-12} V^2 / \text{Hz}$$

Voir document réponse D.2.4

D.2.5. Montrer alors $SNR_{dB} \approx 6,02N + 1,76$.

$$X_{eff} = \frac{V_{FS}}{2\sqrt{2}}$$

$$SNR = \frac{X_{eff}}{\sigma_{eff}} = \frac{X_{eff}}{\sigma} = \sqrt{\frac{X_{eff}^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{\frac{V_{FS}^2}{8}}{\frac{q^2}{12}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{V_{FS}}{q}} = \sqrt{\frac{3}{2}} 2^N \quad \text{car } V_{FS} = q \cdot 2^N$$

$$SNR_{dB} = 20 \log \left(\sqrt{\frac{3}{2}} 2^N \right) = 10 \log \left(\frac{3}{2} \right) + 20 \cdot N \log(2) \approx 6,02N + 1,76$$

D.3. Etude de sur-échantillonnage

D.3.1. Sur le document réponse D.3.1, représenter le spectre du signal échantillonné à la fréquence f_s .

Voir document réponse D.3.1. On remarque que le sur-échantillonnage réduit la complexité du filtre anti-repliement.

D.3.2. Représenter sur le document réponse D.3.2 la densité spectrale de puissance de bruit de quantification, pour $= 16\text{bits}$, $V_{FS} = 2V$ et $f_s = 20,48\text{kHz}$.

La densité spectrale de puissance est constante dans la plage $\left[-\frac{f_s}{2}, +\frac{f_s}{2}\right]$,

$$S_b(f) = \frac{(30,517 \cdot 10^{-6})^2}{12 \times 20480} = 4,04 \cdot 10^{-15} \text{V}^2/\text{Hz}$$

Voir document réponse D.3.2.

D.4. Etude du Convertisseur analogique numérique sigma-delta

D.4.1. Exprimer la réponse du modulateur sous la forme $X(z) = H(z)X_i(z) + H_q(z)E(z)$.

$$X(z) = (X_i(z) - X(z)) \cdot \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + E(z) \Rightarrow (1-z^{-1})X(z) + z^{-1}X(z) = z^{-1}X_i(z) + (1-z^{-1})E(z)$$

D'où $X(z) = z^{-1}X_i(z) + (1-z^{-1})E(z)$ avec $H(z) = z^{-1}$ et $H_q(z) = 1-z^{-1}$

D.4.2. Déterminer analytiquement la réponse fréquentielle $H_q(e^{j\Omega})$.

$$H_q(e^{j\Omega}) = 1 - e^{-j\Omega} = e^{-j0} - e^{-j\Omega} = 2je^{-\frac{j\Omega}{2}} \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

D.4.3. En déduire le module $|H_q(f)|$ en fonction de f .

$$|H_q(f)| = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) \right|$$

D.4.4. Exprimer la réponse du modulateur sous la forme $X(z) = H(z)X_i(z) + H_q(z)E(z)$.

$$X(z) = \left((X_i(z) - X(z)) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - X(z) \right) \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + E(z)$$

$$\Rightarrow (1-z^{-1})^2 X(z) + z^{-1} X(z) + z^{-1}(1-z^{-1})X(z) = z^{-1} X_i(z) + (1-z^{-1})^2 E(z)$$

$$\Rightarrow X(z)(1-2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-1} - z^{-2}) = z^{-1} X_i(z) + (1-z^{-1})^2 E(z)$$

D'où $X(z) = z^{-1} X_i(z) + (1-z^{-1})^2 E(z)$ avec $H(z) = z^{-1}$ et $H_q(z) = (1-z^{-1})^2$

D.4.5. Déterminer analytiquement la réponse fréquentielle $H_q(f)$.

$$H_q(e^{j\Omega}) = -4je^{-j\Omega} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

D.4.6. En déduire le module $|H_q(f)|$ en fonction de f .

$$|H_q(f)| = 4 \sin^2\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

D.4.7. Pour $= 16\text{bits}$, $V_{FS} = 2V$ et $f_s = 20,48\text{kHz}$, exprimer $S_b(f)$ en fonction de f .

$$S_b(f) = S_e(f) \times |H_q(f)|^2 = \frac{q^2}{6f_s} \times |H_q(f)|^2 = \frac{q^2}{6f_s} \cdot 16 \sin^4\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) = \frac{q^2}{3f_s} \cdot 8 \sin^4\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

$$S_b(f) = 121,261 \cdot 10^{-15} \sin^4\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

D.4.8. Calculer les valeurs de $S_b(f)$ pour $f = f_B = 20\text{Hz}$ et $f = \frac{f_s}{2} = 10,24\text{kHz}$.

Pour $f = f_B = 20\text{Hz}$, ; $S_b(f_B) = 121,261 \cdot 10^{-15} \sin^4\left(\frac{\pi 20}{20480}\right) = 1,074 \cdot 10^{-23} \text{V}^2/\text{Hz}$

Pour $f = \frac{f_s}{2} = 10,24\text{kHz}$, ; $S_b\left(\frac{f_s}{2}\right) = 121,261 \cdot 10^{-15} \sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 121,261 \cdot 10^{-15} \text{V}^2/\text{Hz}$

D.4.9. Esquisser la courbe de $S_b(f)$ sur le document réponse D.4.9.

Voir document réponse D.4.9

D.4.10. Comparer les trois courbes de la densité spectrale de puissance de bruit de quantification ($S_b(f)$) et Conclure.

- $S_b(f)$ est constante dans la plage $\left[-\frac{f_e}{2}, +\frac{f_s}{2}\right]$ et vaut $2,07 \cdot 10^{-12} \text{V}^2/\text{Hz}$.

- $S_b(f)$ est constante dans la plage $\left[-\frac{f_s}{2}, +\frac{f_s}{2}\right]$ et vaut $4,04 \cdot 10^{-15} \text{V}^2/\text{Hz}$

Le bruit est faible dans la bande passante et augmente au fur et à mesure quand on s'éloigne de la bande passante, il atteint sa valeur maximale à $\frac{f_s}{2}$.

Conclusion : le sur-échantillonnage diminue le bruit de quantification. Un module de décimation peut être utilisé pour avoir la résolution voulue.

Le modulateur sigma-delta rejette le bruit de quantification en dehors de la bande passante. Un module de décimation est nécessaire pour filtrer le bruit et augmenter la résolution de l'ADC

D.5. Décimation

D.5.1. Montrer que $y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-R)$.

Notons $a(n)$ la sortie du bloc Comb.

$$\begin{cases} a(n) = x(n) - x(n-R) \\ y(n) = y(n-1) + a(n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(n) = y(n-1) + a(n) \end{cases}$$

$$\text{D'où } y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-R)$$

D.5.2. Déduire la sortie $Y(z)$ ainsi que sa fonction de transfert $T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z) - z^{-R}X(z)$$

Fonction de transfert

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z) - z^{-R}X(z) \Rightarrow (1 - z^{-1})Y(z) = (1 - z^{-R})X(z)$$

$$\text{D'où } T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}}$$

D.5.3. Montrer que c'est l'équivalent d'un filtre RIF d'ordre R . Exprimer alors la sortie $y(n)$ sous la forme non récursive.

La division euclidienne de $(1 - z^{-R})$ par $(1 - z^{-1})$ nous donne :

$$T(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(R-1)} = \sum_{k=0}^{-(R-1)} z^{-k}$$

C'est bien un filtre RIF d'ordre R .

Equation de $y(n)$ sous la forme non récursive

$$\text{La sorte } Y(z) = T(z)X(z) = X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + \dots + z^{-(R-1)}X(z)$$

D'où

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-R+1) = \sum_{k=0}^{-(R-1)} x(n-k)$$

D.5.4. Quel avantage peut-on tirer de l'implémentation d'un filtre en peigne ?

Le filtre en peigne nécessite pour son implémentation deux opérations arithmétiques (1 soustraction et 1 addition) quelque soit l'ordre du filtre ; alors que le filtre RIF nécessite $(R - 1)$ additions. Le filtre en peigne est toujours stable puisqu'il est équivalent d'un filtre RIF.

D.5.5. Montrer sans passer par la transformée en z, que les deux structures ont la même réponse $y(n)$.

$$\begin{cases} a(n) = x(n) + a(n - 1) & (1) \\ y(n) = a(n) - a(n - R) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ et } (2) \text{ donne } y(n) = x(n) + a(n - 1) - a(n - R) \quad (3)$$

à partir de (2) on peut écrire $y(n - 1) = a(n - 1) - a(n - R - 1)$

$$\Rightarrow a(n - 1) = y(n - 1) + a(n - R - 1) \quad (4) \text{ remplaçant (4) dans (3)}$$

$$y(n) = x(n) + y(n - 1) + a(n - R - 1) - a(n - R) \quad (5)$$

A partir de (1), on peut écrire $a(n - R) = x(n - R) + a(n - R - 1)$

$$\text{d'où } x(n - R) = a(n - R) - a(n - R - 1) \quad (6)$$

replaçant dans (5) $a(n - R - 1) - a(n - R)$ par $-x(n - R)$

$$y(n) = x(n) + y(n - 1) - x(n - R) \quad \text{c'est bien l'équation trouvée dans D.5.1.}$$

D.5.6. Montrer que la structure de la figure 22 est équivalente à celle de la figure 23. Pour faciliter le développement, prendre $R = 4$, calculer $y(3)$ et $y(7)$ pour les deux structures.

- Structure de la figure 22.

On calcule $y(0), y(1) \dots y(7)$ et on ne retient de $y(3)$ et $y(7)$

$$y(n) = x(n) + y(n - 1) - x(n - 4)$$

$$y(0) = x(0) + y(-1) - x(-R) = x(0)$$

$$y(1) = x(1) + y(0) - x(-3) = x(1) + x(0)$$

$$y(2) = x(2) + y(1) - x(-2) = x(2) + x(1) + x(0)$$

$$y(3) = x(3) + y(2) - x(-1) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0)$$

$$y(3) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0) \quad (*)$$

$$y(4) = x(4) + y(3) - x(0) = x(4) + x(3) + x(2) + x(1) + x(0) - x(0) = x(4) + x(3) + x(2) + x(1)$$

$$y(5) = x(5) + y(4) - x(1) = x(5) + x(4) + x(3) + x(2) + x(1) - x(1) = x(5) + x(4) + x(3) + x(2)$$

$$y(6) = x(6) + y(5) - x(2) = x(6) + x(5) + x(4) + x(3) + x(2) - x(2) = x(6) + x(5) + x(4) + x(3)$$

$$y(7) = x(7) + y(6) - x(3) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4) + x(3) - x(3) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4)$$

$$y(7) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4) \quad (**)$$

- Structure de la figure 23.

$$a(3) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0)$$

$$y(3) = a(3) + a(3 - 4) = a(3)$$

$$y(3) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0) \quad (*)$$

$$a(7) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4) + x(3) + x(2) + x(1) + x(0)$$

$$y(7) = a(7) + a(7 - 4) = a(7) - a(3)$$

$$y(7) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4) \quad (**)$$

On remarque bien que les deux structures ont la même réponse

D.5.7. Rappeler sa fonction de transfert $T(z)$ en introduisant le rapport de moyennage.

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}}$$

D.5.8. Donner sa fonction de transfert $T_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

$$T_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{R^3} \cdot \left(\frac{1-z^{-R}}{1-z^{-1}} \right)^3$$

pour $R = 16$, $T_3(z) = \frac{1}{4096} \cdot \left(\frac{1-z^{-16}}{1-z^{-1}} \right)^3 = 244,140 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1-z^{-16}}{1-z^{-1}} \right)^3$

D.5.9. Déterminer sa réponse fréquentielle $T_3(f)$.

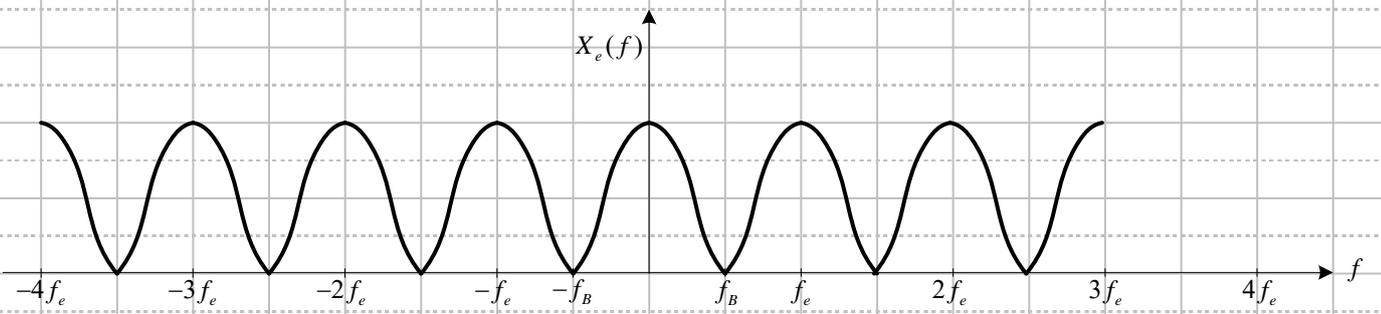
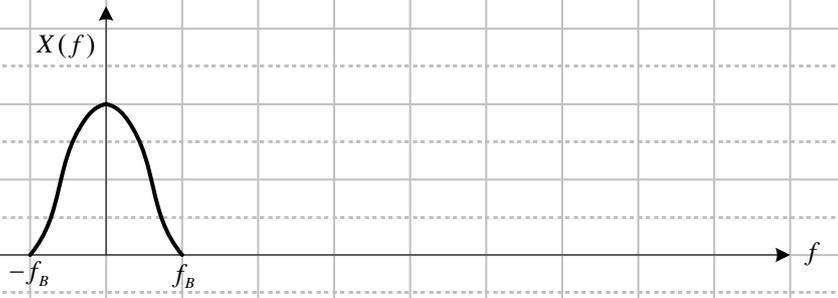
$$T_3(f) = e^{-6j\pi \frac{f}{f_s}} = \left(\frac{\sin\left(\frac{16\pi f}{f_s}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)} \right)^3$$

D.5.10. Pour $f_B = 20\text{Hz}$ et $f_s = 20,48\text{kHz}$, calculer $|T_3(f_B)|$, $|T_3\left(\frac{f_s}{16}\right)|$ et $|T_3\left(\frac{3f_s}{16}\right)|$. Conclure.

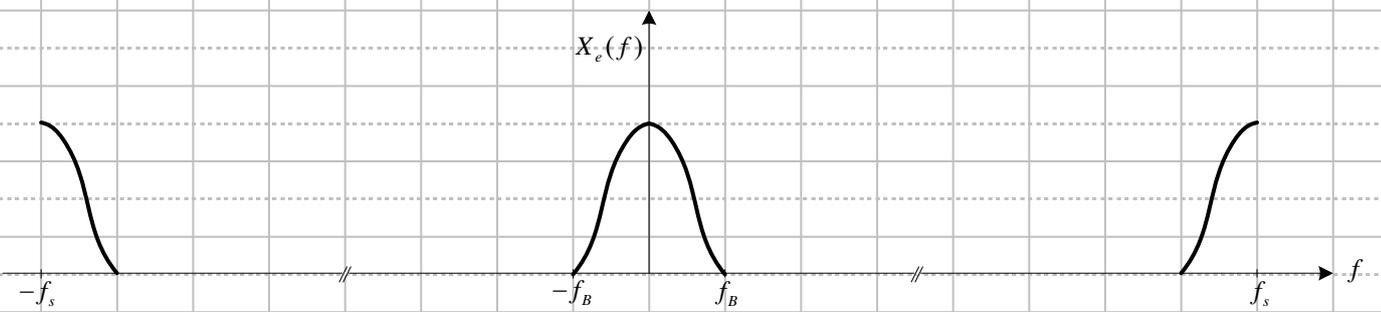
$$|T_3(f)| = 244,140 \cdot 10^{-15} \left(\left| \frac{\sin\left(\frac{16\pi f}{f_s}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)} \right| \right)^3$$

- $|T_3(f_B)| = 0,9988 = -0,01\text{dB}$
- $|T_3\left(\frac{f_s}{16}\right)| = 0$
- $|T_3\left(\frac{3f_s}{16}\right)| = 0,00998 = -40\text{dB}$

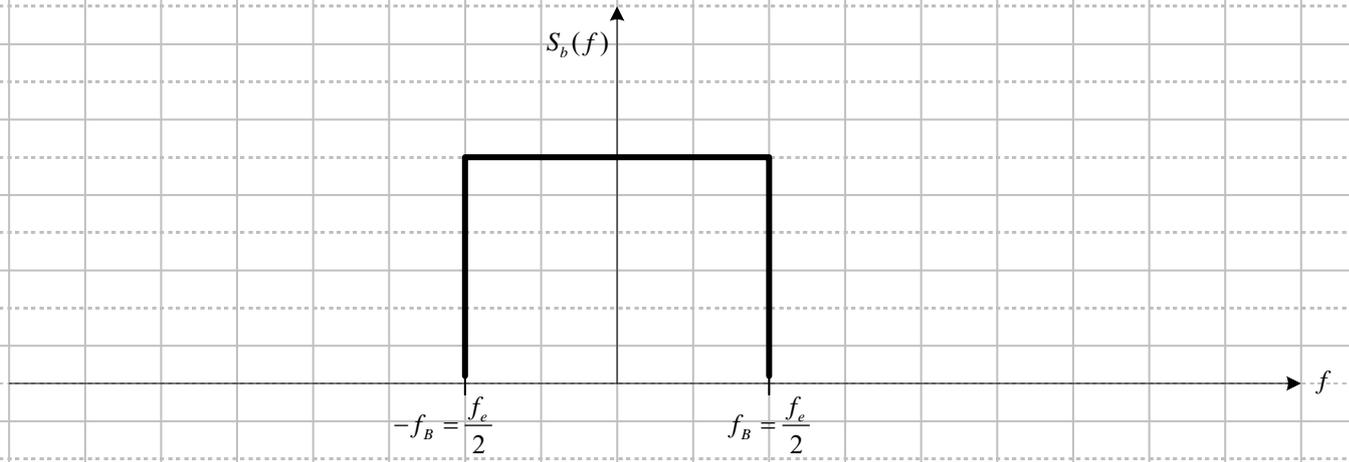
Conclusion : Ce filtre présente une faible atténuation dans la bande passante ($< 0,01\text{dB}$) et une atténuation supérieure à 40dB pour les fréquences supérieures à $\frac{f_s}{16}$. Pour bien filtrer les bruits, il faut ajouter un filtre un autre filtre tel qu'un filtre RIF.



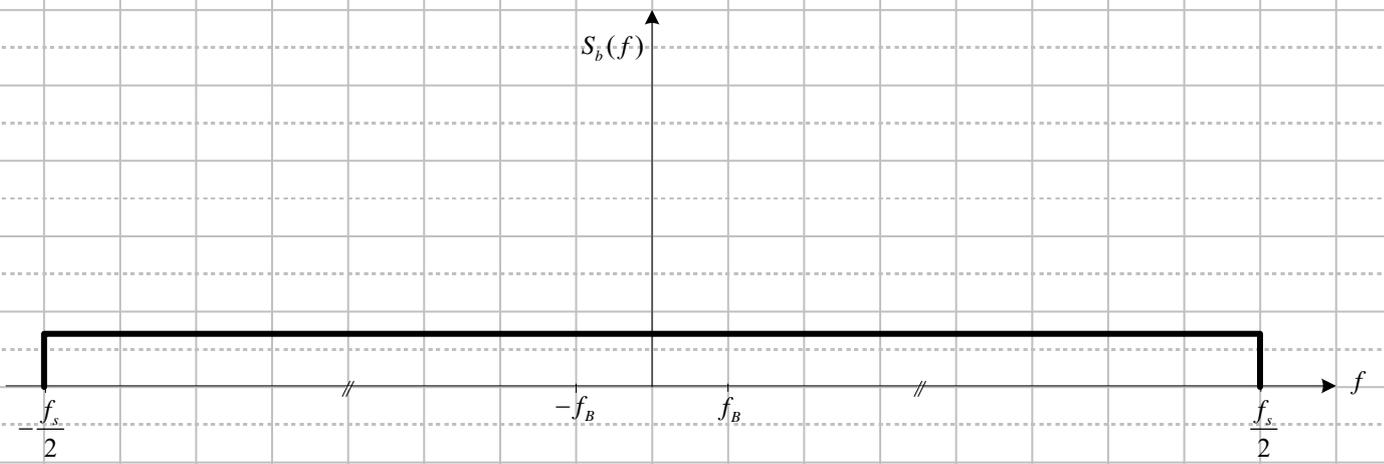
Document réponse D.1.3



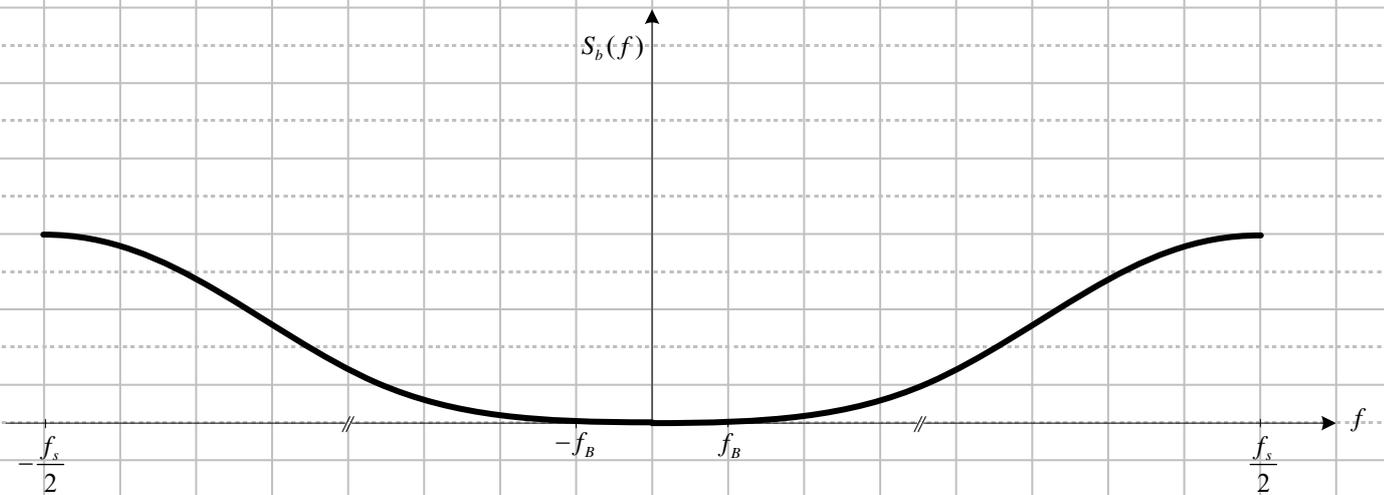
Document réponse D.3.1



Document réponse D.2.4



Document réponse D.3.2



Document réponse D.4.9