République Tunisienne

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Direction Générale des Etudes Technologiques

***Concours de Recrutement des Technologues Spécialité : Génie Electrique***

***Session 2020***

**Corrigé de**

**Epreuve de Technologie : Partie Electronique**

## A - Principe physique de mesure

### *A.1.1. Calcul des absorbances $A(\lambda_1)$ et $A(\lambda_2)$.*

$$Pour\ \lambda_1\ ,\ I_1 = I_{01}10^{-(\varepsilon_{01}c_0+\varepsilon_{r1}c_r).d}$$

$$Pour\ \lambda_2\ ,\ I_2 = I_{02}10^{-(\varepsilon_{02}c_0+\varepsilon_{r1}2).d}$$

$$T = \frac{I}{I_0} = 10^{-\varepsilon(\lambda).c.d}$$

Ce qui donne

$$Pour\ \lambda_1 \qquad T_1 = \frac{I_1}{I_{01}} = 10^{-(\varepsilon_{01}c_0+\varepsilon_{r1}c_r).d}$$

$$Pour\ \lambda_2 \qquad T_2 = \frac{I_2}{I_{02}} = 10^{-(\varepsilon_{02}c_0+\varepsilon_{r2}c_r).d}$$

Nous avons aussi :

$$A(\lambda) = -\log_{10}(T)$$

D'où

$$\begin{cases} A(\lambda_1) = -logT_1 = (\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r).d \\ A(\lambda_2) = -logT_2 = (\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r).d \end{cases}$$

### *A.1.2. Montrons que $R = \frac{\varepsilon_{01}c_0+\varepsilon_{r1}c_r}{\varepsilon_{02}c_0+\varepsilon_{r2}c_r}$.*

Etant donné :

$$R = \frac{A(\lambda_1)}{A(\lambda_2)}$$

$$R = \frac{A(\lambda_1)}{A(\lambda_2)} = \frac{(\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r)\cdot d}{(\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r)\cdot d} = \frac{\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r}{\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r}$$

### *A.1.3. Mettons la concentration de l'hémoglobine réduite sous la forme suivante :*

$$c_r = c_0.\frac{R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}$$

***D'après A.1.2***

$$R = \frac{\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r}{\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r} \Leftrightarrow$$

$$R.(\varepsilon_{02}c_0 + \varepsilon_{r2}c_r) = (\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r) \Leftrightarrow$$

$$R\ \varepsilon_{02}c_0 + R.\varepsilon_{r2}c_r = (\varepsilon_{01}c_0 + \varepsilon_{r1}c_r) \Leftrightarrow$$

$$c_0(R\ \varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}) = c_r(\varepsilon_{r2} - R\varepsilon_{r2})$$

***D'où***

$$c_r = c_0.\frac{R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}$$

***A.1.4. Montrons que la saturation en oxygène*** :

$$SpO_2 = \frac{R.\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{R.(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{02}) - (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{01})}$$

***Avec***

$$SpO_2 = \frac{c_0}{c_0 + c_r}$$

$$SpO_2 = \frac{c_0}{c_0 + c_0 . \frac{R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}} = \frac{1}{1 + \frac{R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}}$$

$$= \frac{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} - R.\varepsilon_{r2} + R.\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}}$$

$$SpO_2 = \frac{R.\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{R.(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{02}) - (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{01})}$$

***A.1.5. A partir des spectres $Hb$ et $HbO_2$ données en annexe 1, et pour les valeurs $\lambda_1 = 660nm$ et $\lambda_2 = 940nm$ cherchons les valeurs approchées de $\varepsilon_{01}$ , $\varepsilon_{r1}$ , $\varepsilon_{02}$ et $\varepsilon_{r2}$ .***

| Longueur d'onde λ nm | Coefficients d'absorption $(cm^{-1}/M)$ | |
|---|---|---|
| | $Hb$ | $HbO_2$ |
| | $\varepsilon_r$ | $\varepsilon_0$ |
| $\lambda_1$= 660nm | $\varepsilon_{r1} = 3227$ | $\varepsilon_{01} = 320$ |
| $\lambda_2$ = 940nm | $\varepsilon_{r2} = 694$ | $\varepsilon_{02} = 1214$ |

***A.1.6 Calculons les valeurs du rapport des absorbances R dans les cas pour $SpO_2 = 0$ et $SpO_2 = 1$***

$$SpO_2 = \frac{R.\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{R.(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{02}) - (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{01})}$$

$$SpO_2 = \frac{694R - 3227}{R(694 - 1214) - (3227 - 320)} = \frac{694R - 3227}{-520R - 2907}$$

$$R(694 + 520 \cdot SpO_2) = 3227 - 2907 \cdot SpO_2$$

$$R = \frac{3227 - 2907 \cdot SpO_2}{694 + 520 \cdot SpO_2}$$

$$SpO_2 = 0 \quad \leftrightarrow R = \frac{3227}{694} = 4.64$$

$$SpO_2 = 1 \quad \leftrightarrow R = \frac{320}{1214} = 0.26$$

**B - Chaine de transmission (Tx)**

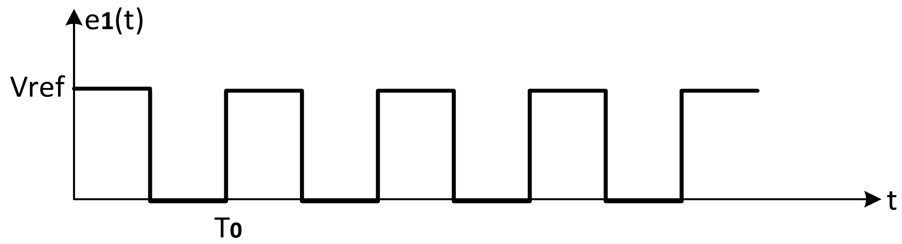
**B.1. Amplificateur à découpage (chopper)**

***Modulation***

***B.1.1. Représentation la forme d'onde du signal*** $e_1(t)$ **.**

D'après le schéma de la figure 6 :

$e_1(t) = e(t) \times m(t)$ avec $\mathbf{e(t) = V_{ref}}$




***B.1.2 Exploitation de la décomposition en série de Fourier***

$$e_1(t) = e(t) \times m(t)$$

Décomposant en série de Fourier $m(t)$

$$m(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T_0}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T_0}t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} m(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} dt = \frac{1}{T_0}[t]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} m(t).\cos(n\frac{2\pi}{T_0}t)dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos(n\frac{2\pi}{T_0}t)dt = \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{2n\pi}\left[\sin(n\frac{2\pi}{T_0}t)\right]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{1}{n\pi}[sin(n.\pi) - sin(0)] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{m(t)}.\sin(n\frac{2\pi}{T_0}t)dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin(n\frac{2\pi}{T_0}t)dt = \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{2n\pi}\left[-\cos(n\frac{2\pi}{T_0}t)\right]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{1}{n\pi}[-cos(n.\pi) + 1]$$

**Alors**

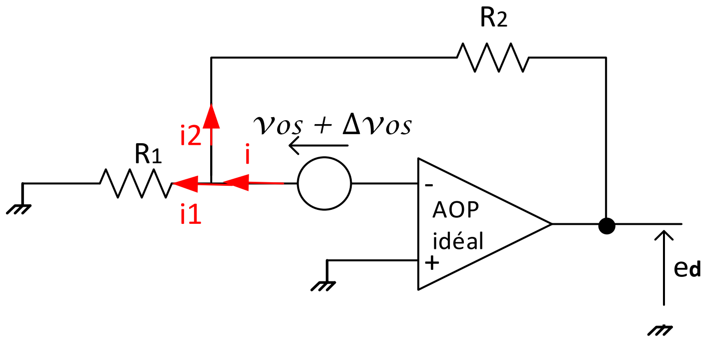
$$\begin{cases} \text{Si } n \; pair & b_n = 0 \\ \text{si } n \; impair & b_n = \dfrac{2}{n\pi} \end{cases}$$

$$m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin\left((2k-1)\frac{2\pi}{T_0}t\right) \quad pour\ k = 1, 2, \ldots$$

$$\mathbf{e_1(t)} = e(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}\sin(5\omega_0 t) + \cdots\right) \quad avec\ \omega_0 = 2\pi/T_0$$

**Amplification**.

***B.1.3. Montrons que l'expression de*** $e_d = k.v_{os} + k.\Delta v_{os}$.




Amplificateur Idéal $\quad i = 0 \quad et\ e_+ - e_- = 0$ .

$$\begin{cases} e_d = -R_2 i_2 + R_1 i_1 \\ v_{OS} + \Delta v_{OS} = R_1 i_1 \\ i = i_1 + i_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_1 = -i_2 \\ v_{OS} + \Delta v_{OS} = R_1 i_1 \\ e_d = (R_1 + R_2) i_1 \end{cases}$$

$$\frac{e_d}{v_{OS} + \Delta v_{OS}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$e_d = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_{os} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \Delta v_{os}$$

Et

$$k = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

***B.1.4 Montrons que*** $e_2(t) = -K_1 e(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\omega_0 t\right] + k.v_{os} + k.\Delta v_{os}$ .

$$e_2(t) = -e_1(t)\frac{R_2}{R_1}$$

$$e_2(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}sin(5\omega_0 t) + \cdots\right)$$

D'après les données de l'énoncé, les harmoniques seront éliminées et ne reste que la composante continue et la fondamentale.

$$e_2(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}sin(\omega_0 t)\right)$$

En ajoutant la tension de décalage $e_d(t)$ à la sortie.

$$e_2(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}sin(\omega_0 t)\right) + k.v_{os} + k.\Delta v_{os}$$

Avec

$$K_1 = \frac{R_2}{R_1}$$

### *B.1.5 Expression de $e_3(t)$.*

A partir de l'expression trouvée

$$e_2(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t)\left(\frac{1}{\mathbf{2}} + \frac{2}{\pi} sin(\omega_0 t)\right) + k.v_{os} + k.\Delta v_{os}$$

$e(\mathrm{t})$ est pratiquement constante, $\Delta v_{os}$ due à la température à une fréquence très faible devant la fréquence de la fondamentale.

$$\boldsymbol{e_3(t) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{2}{\pi} e(t)\, sin(\omega_0 t)}$$

***<u>Démodulation</u>***

### *B.1.6 Trouver l'expression du signal $e_4(t)$.*

$$\mathrm{e}_4(\mathrm{t}) = \mathrm{e}_3(\mathrm{t}) \times m(\mathrm{t}) = -\frac{R_2}{R_1} e(\mathrm{t})\left(\frac{2}{\pi}\sin(\omega_0 t)\right) \times m(\mathrm{t})$$

$$\mathrm{e}_4(\mathrm{t}) = -\frac{R_2}{R_1} e(\mathrm{t})\left(\frac{2}{\pi}\sin(\omega_0 t)\right)\left(\frac{1}{\mathbf{2}} + \frac{2}{\pi}\sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\omega_0 t) + \cdots\right)$$

### B.1.7. Expression de la tension de sortie $V(t)$.

$$\mathrm{e}_4(\mathrm{t}) = -\frac{R_2}{R_1} e(\mathrm{t})\left(\frac{1}{\boldsymbol{\pi}}\sin(\omega_0 t) + \frac{4}{\pi^2}\sin^2(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}\sin(\omega_0 t).\sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\sin(\omega_0 t).\sin(5\omega_0 t) + \cdots\right)$$

Seul le terme $\boldsymbol{\frac{4}{\pi^2}\sin^2(\omega_0 t)}$ est toujours positif, il comporte donc une composante continue :

$$\frac{4}{\pi^2}\sin^2(\omega_0 t) = \frac{4}{\pi^2} \times \frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2} = \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2}\cos(2\omega_0 t)$$

D'où

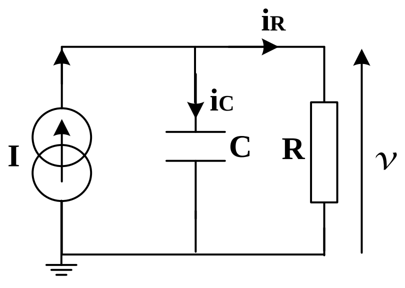
$$\mathrm{e}_4(\mathrm{t}) = -\frac{R_2}{R_1} e(\mathrm{t})\left[\frac{2}{\pi^2} + \text{termes harmoniques de frequence } k\omega_0, \text{ avec } k \geq 1\right]$$

Après filtrage :

$$\boldsymbol{V(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(\mathrm{t}) \frac{2}{\pi^2}}$$

## C - Chaine de réception Rx

### C.1. Etude de la photodiode



**C.1.1 Montrons que** $V_I = \frac{S_d.R}{1+jRC\omega}\emptyset_I$.

$$V_I = Z_e.I$$

$$Z_e = \frac{R.\frac{1}{jc\omega}}{R+.\frac{1}{jc\omega}} = \frac{R}{1+jRC\omega}$$

$$V_I = Z_e.I = \frac{R}{1+jRC\omega}I$$

***En remplaçant I par*** $S_d\Phi_I$

$$V_I = \frac{S_d.R}{1+jRC\omega}\Phi_I$$

***C.1.2 Amplitude*** $V_I$ ***en fonction de*** $S_d$ , $\emptyset_I$ , $R$ , $f_c$ ***et*** $f$.

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad , \quad \omega = 2\pi f$$

$$V_I = \frac{S_dR}{1+j2\pi RCf}\Phi_I = \frac{S_dR}{1+j\frac{f}{f_c}}\Phi_I$$

***C.1.3 La sensibilité*** $S(f)$

La sensibilité est définie comme le module du rapport $\tilde{v}/\tilde{\varphi}$

$$S(f) = \frac{|V_I|}{|\Phi_I|} = \frac{S_dR}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

***C.1.4 En régime statique*** $f = 0$.

$$S(0) = \frac{RS_d}{\sqrt{1+\left(\frac{0}{f_c}\right)^2}} = S_dR$$

***C.1.5. La sensibilité de la photodiode pour les fréquences*** $f_c$ , $2f_c$ ***et*** $10f_c$ .

$$S(f_c) = \frac{S_dR}{\sqrt{1+\left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2}} = \frac{S_dR}{\sqrt{2}}$$

$$S(2f_c) = \frac{S_dR}{\sqrt{1+\left(\frac{2f_c}{f_c}\right)^2}} = \frac{S_dR}{\sqrt{5}}$$

$$S(10f_c) = \frac{S_dR}{\sqrt{1+\left(\frac{10f_c}{f_c}\right)^2}} = \frac{S_dR}{\sqrt{101}}$$

***C.1.6. Compléter le tableau du document réponse C.1.6 pour*** $C = 5pF$ ***et*** $R = 180K\Omega$.

D'après l'annexe 3, la sensibilité propre de la photodiode :

Pour $\lambda_1 = 660nm \quad \rightarrow \quad S_d = 0.47A/W$

Pour $\lambda_2 = 940nm \quad \rightarrow \quad S_d = 0.77A/W$

| | $\lambda_1 = 660\ nm$ | $\lambda_2 = 940\ nm$ |
|---|---|---|
| **Sensibilité *Sd* en A/W** | **0.47** | **0.77** |
| $S(0)$ | **84600 V/W** | **138600 V/W** |
| $S(f_c)$ | **59400 V/W** | **97200 V/W** |
| $S(2f_c)$ | **37800 V/W** | **61200 V/W** |
| $S(10f_c)$ | **8280 V/W** | **13680 V/W** |

## C2. Amplificateur à Transimpédance TIA (convertisseur courant-tension)

### *C.2.1. Fonction de transfert équivalente*

$$T(jf) = \frac{V_0(jf)}{I_{PH}(jf)}$$

$$V_0 = -Z_F I_{PH}$$

$$T(jf) = \frac{V_0}{I_{PH}} = -Z_F = -\frac{R_F \times \frac{1}{j2\pi C_F f}}{R_F + \frac{1}{j2\pi C_F f}}$$

$$T(jf) = -\frac{R_F}{1 + j2\pi R_F C_F f}$$

$$T(jf) = -\frac{R_F}{1 + j\frac{f}{f_c}} \quad avec\ f_c = \frac{1}{2\pi R_F C_F}$$

### *C.2.2. Phase de $T(jf)$.*

$$\theta = \pi - Arctan\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

### *C.2.3 Expression de $NG(j\omega)$*

$$V_0 + Z_{BF} I_{IN} - V_n = 0$$

$$V_n = -Z_{IN} I_{IN} \quad \Rightarrow I_{IN} = -\frac{V_n}{Z_{IN}}$$

$$V_0 - Z_{BF}\frac{V_n}{Z_{IN}} - V_n = 0 \Leftrightarrow V_0 = \left(\frac{Z_{BF}}{Z_{IN}} + 1\right)V_n$$

$$NG(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{V_n(j\omega)} = 1 + \frac{Z_{BF}(j\omega)}{Z_{IN}(j\omega)}$$

### *C.2.4. Montrons que*

$$V_0(j\omega) = \frac{R_f + R_e}{R_e} \cdot \frac{1 + \frac{R_f . R_e}{R_f + R_e}(C_f + C_e)j\omega}{1 + jR_f C_f \omega} V_n$$

$$V_0(j\omega) = NG(j\omega) \cdot V_n(j\omega) = \left(1 + \frac{Z_{BF}(j\omega)}{Z_{IN}(j\omega)}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(1 + \frac{\frac{R_F}{1+jR_F C_F \omega}}{\frac{R_e}{1+jR_e C_e \omega}}\right) \cdot V_n(j\omega) = \left(1 + \frac{\frac{R_F}{1+jR_F C_F \omega}}{\frac{R_e}{1+jR_e C_e \omega}}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(1 + \frac{R_F}{R_e} \times \frac{1 + jR_F C_F \omega}{1 + jR_e C_e \omega}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(\frac{R_e\,(1 + jR_F C_F \omega) + R_F\,(1 + jR_e C_e \omega)}{R_e\,(1 + jR_F C_F \omega)}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(\frac{R_e + R_F + R_e R_F\,(C_e + C_F) j\omega}{R_e\,(1 + jR_F C_F \omega)}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

$$V_0(j\omega) = \left(\frac{R_e + R_F}{R_e} \cdot \frac{1 + j\,\frac{R_e R_F}{R_e + R_F}\,(C_e + C_F)\omega}{1 + jR_F C_F \omega}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

C.2.5. Approximation de $\boldsymbol{V_0(j\omega)}$ pour $R_e \gg R_F$

$$\frac{R_e + R_F}{R_e} = 1 + \frac{R_F}{R_e} \approx 1$$

**Et**

$$\frac{R_e R_F}{R_e + R_F} = \frac{R_F}{1 + \frac{R_F}{R_e}} \approx R_F$$

D'où

$$V_0(j\omega) = \left(\frac{1 + j\,R_F\,(C_e + C_F)\omega}{1 + jR_F C_F \omega}\right) \cdot V_n(j\omega)$$

***C.2.6 fréquence relative au zéro de la fonction de transfert du bruit*** $NG(j\omega)$

$$f_z = \frac{1}{2\pi R_F\,(C_e + C_F)}$$

***C.2.7 fréquence relative au pôle de la fonction de transfert du bruit*** $NG(j\omega)$

$$f_p = \frac{1}{2\pi R_F C_F}$$

**C.3. Amplificateur à Transconductance OTA**

***C.3.1 Justifier l'utilisation de la simplification***

$$g_0 = \frac{1}{r_{ds1}} + \frac{1}{r_{ds3}} = \frac{1}{r_{ds2}} + \frac{1}{r_{ds4}}$$

$$C_p = C_{db1} + C_{db3} = C_{db2} + C_{db4}$$

***Les résistances et les capacités de chaque branche sont montées en parallèle. De plus les transistors sont identiques. D'où $g_0$ et $C_p$ représentent respectivement la conductance équivalente et la capacité de équivalente de chaque branche***.

Sachant que $V_{out} = V_{out}^{+} - V_{out}^{-}$ et $V_{in} = V_{in2} - V_{in1}$ .

***Montrer que la fonction de transfert*** $F(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{g_m}{g_0 + j\omega(C + C_p)}$.

$$-g_m V_{in1} = \left(g_0 + j\omega\left(C_p + C\right)\right) V_{out}^{-}$$

$$-g_m V_{in2} = \left(g_0 + j\omega\left(C_p + C\right)\right) V_{out}^{+}$$

$$-g_m(V_{in2} - V_{in1}) = (g_0 + j\omega(C_p + C)(V_{out}^{+} - V_{out}^{-})$$

Alors

$$\boldsymbol{F(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{g_m}{g_0 + j\omega(C_p + C)}}$$

***C.3.3. Gain statique G et la fréquence de coupure $f_C$ .***

$$F(p) = \frac{-\frac{g_m}{g_0}}{1 + j\omega\frac{(C_p+C)}{g_0}} = -\frac{g_m}{g_0} \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\omega_c = \frac{g_0}{C_p + C} = 2\pi f_c$$

Le gain statique

$$\boldsymbol{G = -\frac{g_m}{g_0}}$$

La fréquence de coupure

$$\boldsymbol{f_c = \frac{g_0}{2\pi(C_p + C)}}$$

**La capacité parasite modifie la fréquence de coupure**.

**D - Conversion analogique numérique (ADC)**

**D.1. Etude de l'échantillonnage**

***D.1.1 Expression analytique du signal échantillonné $x_e(t)$ .***

$$\boldsymbol{x_e(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e}x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_e t}}$$

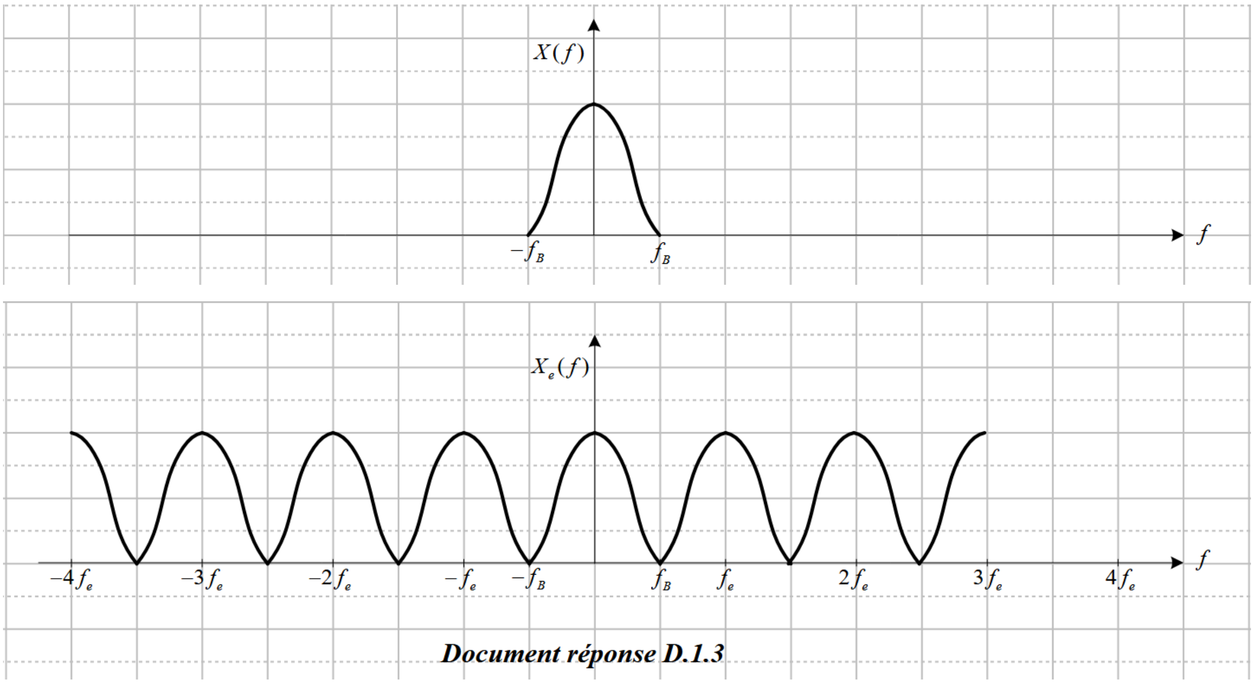
***D.1.2. Transformée de Fourrier de $X_e(f)$ .***

D'après la propriété de décalage fréquentiel :

$$\boldsymbol{x_e(t) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi n f_e t}}$$

$$\boldsymbol{X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)}$$

***D.1.3. Représentation sur document réponse A.1.3 du spectre $X_e(f)$.***




***Document réponse D.1.3***

**D.1.4. Fréquence d'échantillonnage minimale.**

$f_B = 20Hz \implies f_{e_{min}} = 2f_B = 40Hz$ (d'après le théorème de shannon)

**D2. Quantificateur uniforme N bits**

***D.2.1 Expression du pas de quantification q.***

$$q = \frac{V_{FS}}{2^N}$$

***D.2.2. Pour N = 16 bits et $V_{FS}$ = 2V.***

$$q = \frac{2}{2^{16}} = 30,517\mu V$$

D.2.3 Montrons que $\sigma^2 = \frac{q^2}{12}$.

$$\sigma^2 = \frac{1}{q}\int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^2(t)dt$$

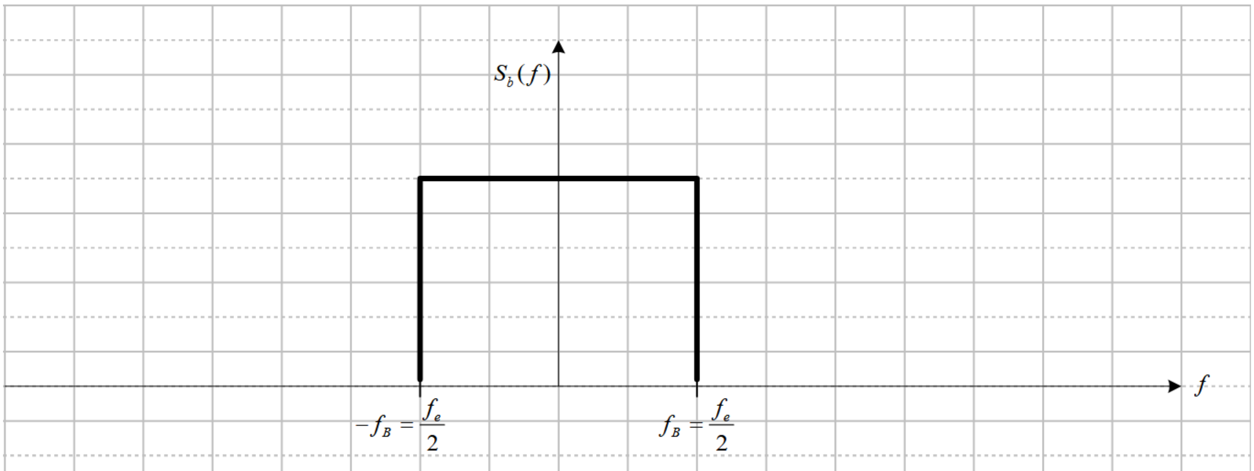
$$= \frac{1}{q}\int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} t^2\, dt$$

$$= \frac{1}{3q}[t^3]_{\frac{-q}{2}}^{\frac{q}{2}}$$

$$= \frac{1}{3q} \times \frac{2q^3}{2^3} = \frac{q^2}{12}$$

***D.2.4 Représentation de la densité spectrale de puissance $S_b(f)$ sur le document réponse D.2.4, pour $N = 16, V_{FS} = 2V$ et $f_e = 40Hz$.***

$$S_b(f) = \frac{(30,517 \cdot 10^{-6})^2}{12 \times 40} = 2,07 \cdot 10^{-12}\ V^2/Hz$$



***Document réponse D.2.4***

***D.2.5. Montrons que $SNR_{dB} \approx 6,02N + 1,76$.***

$$X_{eff} = \frac{V_{FS}}{2\sqrt{2}}$$

$$SNR = \frac{X_{eff}}{\sigma_{eff}} = \frac{X_{eff}}{\sigma} = \sqrt{\frac{X_{eff}^2}{\sigma^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{V_{FS}^2}{8}}{\frac{q^2}{12}}} = \frac{V_{FS}}{q}\sqrt{\frac{3}{2}} = 2^N\sqrt{\frac{3}{2}}$$

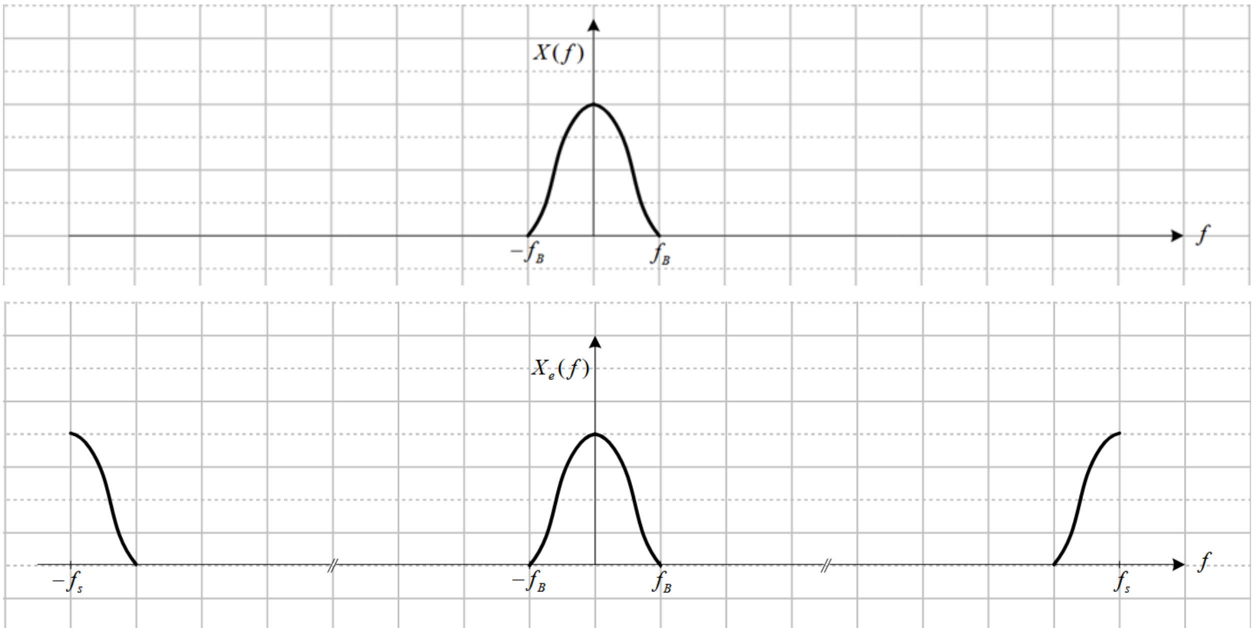
$$SNR_{dB} = 20\log\left(2^N\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= 20N \times log(2) + 10log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\approx 6.02N + 1,76$$

**D.3. Etude de sur-échantillonnage**

***D.3.1 Représentation du spectre du signal échantillonné à la fréquence $f_s$, sur le document réponse D.3.1.***



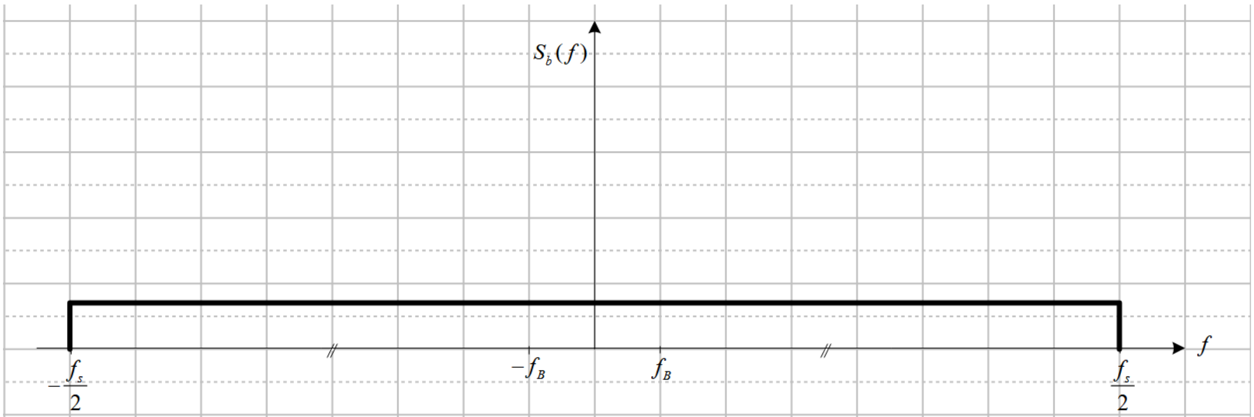

**Document réponse D.3.1**

***On remarque que le sur-échantillonnage réduit la complexité du filtre anti-repliement.***

***D.3.2. Représentation de la densité spectrale de puissance de bruit de quantification sur le document réponse D.3.2, pour $= 16bits$ , $V_{FS} = 2V$ et $f_s = 20,48kHz$.***

La densité spectrale de puissance est constante dans la plage $\left[-\frac{f_S}{2}\ ,+\frac{f_S}{2}\right]$

$$S_b(f) = \frac{\left(30,517 \cdot 10^{-6}\right)^2}{12 \times 20480} = \boldsymbol{4,04 \cdot 10^{-15} V^2/Hz}$$




**Document réponse D.3.2**

***D4. Etude du Convertisseur analogique numérique sigma-delta***

***D.4.1.*** $X(z) = H(z)X_i(z) + H_q(z)E(z)$.

$$X(z) = \left(X_i(z) - X(z)\right) \times \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + E(z)$$

$$(1 - z^{-1})X(z) = \left(X_i(z) - X(z)\right)z^{-1} + (1 - z^{-1})E(z)$$

$$(1 - z^{-1})X(z) + z^{-1}X(z) = z^{-1}X_i(z) + (1 - z^{-1})E(z)$$

D'où

$$X(z) = z^{-1}X_i(z) + (1 - z^{-1})E(z)$$

avec $\boldsymbol{H(z) = z^{-1}}$ et $\boldsymbol{H_q(z) = 1 - z^{-1}}$

***D.4.2. Réponse fréquentielle $H_q(e^{j\Omega})$.***

$$\mathbf{H_q(e^{j\Omega}) = 1 - e^{-j\Omega} = e^{-j0} - e^{-j\Omega} = 2je^{-\frac{j\Omega}{2}}\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

***D.4.3. Module $|H_q(f)|$ en fonction de $f$.***

$$\boldsymbol{|H_q(f)| = 2\left|\sin\left(\frac{2\pi f}{2f_s}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)\right|}$$

***D.4.4. Réponse du modulateur du second ordre***

$$X(z) = \left(\left(X_i(z) - X(z)\right)\frac{1}{1 - z^{-1}} - X(z)\right)\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + E(z)$$

$$X(z) = \left(\left(X_i(z) - X(z)\right)\frac{1}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}\right)z^{-1} + E(z)$$

$$(1 - z^{-1})^2X(z) =$$

$$(X_i(z) - X(z) - (1 - z^{-1})X(z))z^{-1} + (1 - z^{-1})^2E(z)$$

$$(1 - z^{-1})^2X(z) + z^{-1}\,X(z) + z^{-1}(1 - z^{-1})X(z) = z^{-1}\,X_i(z) + (1 - z^{-1})^2E(z)$$

$$X(z)(1 - 2z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-1} - z^{-2}) = z^{-1}\,X_i(z) + (1 - z^{-1})^2E(z)$$

D'où

$$X(z) = z^{-1}\,X_i(z) + (1 - z^{-1})^2E(z)$$

avec $\boldsymbol{H(z) = z^{-1}}$ et $\boldsymbol{H_q(z) = (1 - z^{-1})^2}$

***D.4.5. Réponse fréquentielle $H_q(f)$.***

$$\boldsymbol{H_q(e^{j\Omega}) = (1 - e^{-j\Omega})^2 = \left(2je^{-\frac{j\Omega}{2}}sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)^2}$$

$$\boldsymbol{H_q(e^{j\Omega}) = -4e^{-j\Omega}\,sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

***D.4.6. Module $|H_q(f)|$ en fonction de $f$.***

$$|H_q(f)| = 4\sin^2\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

***D.4.7 Densité spectrale $S_b(f)$, pour $N = 16bits$, $V_{FS} = 2V$ et $f_s = 20,48kHz$.***

$$S_b(f) = S_e(f) \times \left|H_q(f)\right|^2 = \frac{q^2}{6f_s} \times \left|H_q(f)\right|^2 = \frac{q^2}{6f_s} \cdot 16\sin^4\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

$$S_b(f) = \frac{q^2}{3f_s} \cdot 8\sin^4\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

$$S_b(f) = 121,261 \cdot 10^{-15}\sin^4\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)$$

***D.4.8. Valeurs de $S_b(f)$ pour $f = f_B = 20Hz$ et $f = \frac{f_s}{2} = 10,24kHz$.***

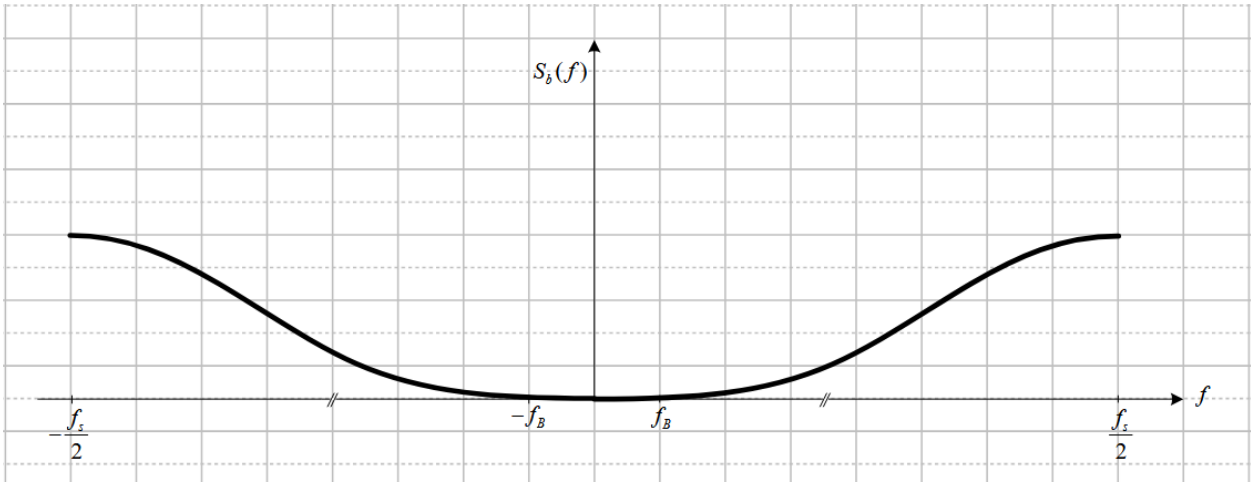
Pour $f = f_B = 20Hz$,

$$S_b(f_B) = 121,261 \cdot 10^{-15}\sin^4\left(\frac{\pi 20}{20480}\right) = 1,074 \cdot 10^{-23}V^2/Hz$$

Pour $f = \frac{f_s}{2} = 10{,}24kHz$,

$$S_b\left(\frac{f_s}{2}\right) = 121,261 \cdot 10^{-15}\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 121,261 \cdot 10^{-15}V^2/Hz$$

***D.4.9 Courbe de $S_b(f)$***




***Document réponse D.4.9***

***D.4.10. Comparaison de trois courbes de la densité spectrale de puissance de bruit de quantification.***

- $S_b(f)$ est constante dans la plage $\left[-\frac{f_e}{2}, +\frac{f_s}{2}\right]$ et vaut $2{,}07 \cdot 10^{-12}V^2/Hz$.
- $S_b(f)$ est constante dans la plage $\left[-\frac{f_s}{2}, +\frac{f_s}{2}\right]$ et vaut $4{,}04 \cdot 10^{-15}V^2/Hz$
- Le bruit est faible dans la bande passante et augmente au fur et à mesure quand on s'éloigne de la bande passante, il atteint sa valeur maximale à $\frac{f_s}{2}$.

**Conclusion** : le sur-échantillonnage diminue le bruit de quantification. Un module de décimation peut être utiliser pour avoir la résolution voulue.

Le modulateur sigma-delta rejette le bruit de quantification en dehors de la bande passante. Un module de décimation est nécessaire pour filtrer le bruit et augmenter la résolution de l'ADC

***D.5. Décimation***

***D.5.1 Montrons que*** $\boldsymbol{y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-R)}$ **.**

Notons $\boldsymbol{a(n)}$ la sortie du bloc Comb.

$$\begin{cases} \boldsymbol{a(n) = x(n) - x(n-R)} \\ \boldsymbol{y(n) = y(n-1) + a(n)} \end{cases}$$

D'où $\boldsymbol{y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-R)}$

***D.5.2. Sortie*** $\boldsymbol{Y(z)}$ ***et fonction de transfert*** $\boldsymbol{T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$**.**

$$\boldsymbol{Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z) - z^{-R}X(z)}$$

Fonction de transfert

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z) - z^{-R}X(z)$$

$$(1 - z^{-1})Y(z) = (1 - z^{-R})X(z)$$

D'où

$$\boldsymbol{T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}}}$$

***D.5.3 Montrons que c'est l'équivalent d'un filtre RIF d'ordre R et exprimons la sortie*** $\boldsymbol{y(n)}$ ***sous la forme non récursive.***

La division euclidienne de $(1 - z^{-R})$ par $(1 - z^{-1})$ nous donne :

$$\boldsymbol{T(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots z^{-(R-1)} = \sum_{k=0}^{(R-1)} z^{-k}}$$

C'est bien un filtre RIF d'ordre $R - 1$.

**<u>Equation de $y(n)$ sous la forme non récursive</u>**

$$Y(z) = T(z)X(z) = X(z) + z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) + \cdots + z^{-(R-1)}X(z)$$

D'où

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \cdots + x(n-R+1)$$

$$\boldsymbol{y(n) = \sum_{k=0}^{(R-1)} x(n-k)}$$

***D.5.4. Le filtre en peigne nécessite pour son implémentation deux opérations arithmétiques (1 soustraction et 1 addition) quel que soit l'ordre du filtre ; alors que le filtre RIF nécessite*** $\boldsymbol{(R-1)}$ ***additions. Le filtre en peigne est toujours stable puisqu'il est équivalent d'un filtre RIF.***

***D.5.5***

$$\begin{cases} a(n) = x(n) + a(n-1) & (1) \\ y(n) = a(n) - a(n-R) & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) donne

$$y(n) = x(n) + a(n-1) - a(n-R) \qquad (3)$$

à partir de (2) on peut écrire

$$y(n-1) = a(n-1) - a(n-R-1)$$

$$\Longrightarrow a(n-1) = y(n-1) + a(n-R-1) \quad (4)$$

remplaçant (4) dans (3)

$$y(n) = x(n) + y(n-1) + a(n-R-1) - a(n-R) \qquad (5)$$

A partir de (1), on peut écrire

$$a(n-R) = x(n-R) + a(n-R-1)$$

d'où

$$x(n-R) = a(n-R) - a(n-R-1) \quad (6)$$

replaçant dans (5) $a(n-R-1) - a(n-R)$ par $-x(n-R)$

$$\boldsymbol{y(n) = x(n) + y(n-1) - x(n-R)}$$

**Autre méthode** : Il suffit d'exploiter la propriété de commutativité de convolution des systèmes linéaires invariants (LTI) : $h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n)$

***D.5.6 Montrons l'équivalence de la structure de la figure 22 et celle de la figure 23.***

- Structure de la figure 22.

On calcule $y(0), y(1) \ldots . y(7)$ et on ne retient de $y(3) et\ y(7)$

$y(n) = x(n) + y(n-1) - x(n-4)$

$y(0) = x(0) + y(-1) - x(-4) = x(0)$

$y(1) = x(1) + y(0) - x(-3) = x(1) + x(0)$

$y(2) = x(2) + y(1) - x(-2) = x(2) + x(1) + x(0)$

$y(3) = x(3) + y(2) - x(-1) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0)$

$\boldsymbol{y(3) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0)}$ (*)

$y(4) = x(4) + y(3) - x(0) = x(4) + x(3) + x(2) + x(1) + x(0) - x(0) = x(4) + x(3) + x(2) + x(1)$

$y(5) = x(5) + y(4) - x(1) = x(5) + x(4) + x(3) + x(2) + x(1) - x(5) = x(5) + x(4) + x(3) + x(2)$

$y(6) = x(6) + y(5) - x(2) = x(6) + x(5) + x(4) + x(3) + x(2) - x(2) = x(6) + x(5) + x(4) + x(3)$

$y(7) = x(7) + y(6) - x(3) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4) + x(3) - x(3) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4)$

$\boldsymbol{y(7) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4)}$ **(**)**

- Structure de la figure 23.

$a(3) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0)$

$y(3) = a(3) - a(3-4) = a(3)$

$y(3) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0)$ $(*)$

$a(7) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4) + x(3) + x(2) + x(1) + x(0)$

$y(7) = a(7) - a(7-4) = a(7) - a(3)$

$y(7) = x(7) + x(6) + x(5) + x(4) \qquad (**)$

On remarque bien que les deux structures ont la même réponse

***D.5.7. Fonction de Transfert $T(z)$ en introduisant le rapport de moyennage.***

$$\boldsymbol{T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}}}$$

***D.5.8. Fonction de transfert $T_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.***

$$\boldsymbol{T_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{R^3} \cdot \left(\frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}}\right)^3}$$

Pour $R = 16,\ T_3(z) = \frac{1}{4096} \cdot \left(\frac{1-z^{-16}}{1-z^{-1}}\right)^3 = 244{,}140 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1-z^{-16}}{1-z^{-1}}\right)^3$

***D.5.9. Réponse fréquentielle $T_3(f)$.***

$$T(\Omega) = \frac{1}{R} \times \frac{1 - e^{-jR\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{1}{R} \times \frac{e^{-j\frac{R\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{R\Omega}{2}} - e^{-j\frac{R\Omega}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)}$$

$$T(\Omega) = \frac{1}{R} \times \frac{e^{-j\frac{R\Omega}{2}}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}} \times \frac{\frac{\left(e^{j\frac{R\Omega}{2}} - e^{-j\frac{R\Omega}{2}}\right)}{2j}}{\frac{\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)}{2j}}$$

$$T(\Omega) = \frac{1}{R} \times e^{-j\frac{(R-1)\Omega}{2}} \left(\frac{\sin\left(\frac{R\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right)$$

Or

$$\Omega = \omega T_s = \frac{2\pi f}{f_s}$$

$$T(f) = \frac{1}{R} \times e^{-j\frac{(R-1)\pi f}{f_s}} \left(\frac{\sin\left(\frac{R\pi f}{f_s}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)}\right)$$

$$T_3(f) = \frac{1}{R^3} e^{-j\frac{3(R-1)\pi f}{f_s}} \left(\frac{\sin\left(\frac{R\pi f}{f_s}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)}\right)^3$$

Etant donné $R = 16$

$$\boldsymbol{T_3(f) = \frac{1}{16^3} e^{-j\frac{45\pi f}{f_s}} \left(\frac{\sin\left(\frac{16\pi f}{f_s}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)}\right)^3}$$

***D.5.10 calcul des modules*** $|T_3(f_B)|$ , $\left|T_3(\frac{f_s}{16})\right|$ ***et*** $\left|T_3(\frac{\frac{3}{2}f_s}{16})\right|$***,*** ***pour*** $f_B = 20Hz$ ***et*** $f_s = 20,48kHz$***.***

$$|T_3(f)| = \left(\frac{1}{16}\left|\frac{\sin\left(\frac{16\pi f}{f_s}\right)}{\sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)}\right|\right)^3$$

- $|T_3\ (f_B\ )| = 0,9985 = -0.013dB$
- $\left|T_3\left(\frac{f_s}{16}\right)\right| = 0$
- $\left|T_3\left(\frac{\frac{3}{2}f_s}{16}\right)\right| = 0,00998 = -40dB$

**<u>Conclusion</u>** : Ce filtre présente une faible atténuation dans la bande passante ($< 0{,}013dB$) et une atténuation supérieure à $40dB$ pour les fréquences supérieures à $\frac{f_s}{16}$.