

Corrigé Sujet 2014

A - Caractérisation des cellules de filtrage

A1- Cellule de filtrage passif

A1.1

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R_2 Z_{c1}}{R_1 (Z_{c1} + Z_{c2} + R_2) + Z_{c1} (Z_{c2} + R_2)}$$

A1.2

$$H_1(p) = \frac{R_2 C_2 p}{1 + (R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2) p + R_1 R_2 C_1 C_2 p^2} = \frac{\frac{1}{R_1 C_1} p}{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} + \frac{(R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2)}{R_1 R_2 C_1 C_2} p + p^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}; \quad A = \frac{1}{R_1 C_1}; \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}; \quad Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_2 C_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2}$$

C'est un filtre passe bande d'ordre 1.

A1.3

$$H_1(j\omega) = \frac{A j \omega}{\omega_0^2 + \frac{\omega_0}{Q} j \omega + (j\omega)^2} = \frac{A}{\frac{\omega_0}{Q} - j(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)} \quad ; \quad |H_1(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2}}$$

$$H_{1\max} = \frac{A Q}{\omega_0} \text{ quand } \omega = \omega_0;$$

$$H_1(j\omega) = \frac{H_{1\max}}{1 - jQ\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \text{ et } |H_1(j\omega)| = \frac{H_{1\max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

A1.4

$$|H_1(j\omega)| = \frac{H_{1\max}}{\sqrt{2}} \text{ d'où } \Rightarrow Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 \Rightarrow Q \left| \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right| = 1$$

Ceci conduit à deux cas possibles :

$$Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 1 \quad \text{ou} \quad Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) = -1$$

La résolution de deux équations donne :

$$\omega_H = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q^2} + 1 \right) \quad \text{et} \quad \omega_B = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q^2} - 1 \right)$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}; \quad \omega_B \cdot \omega_H = \omega_0^2; \quad \omega_0 : \text{fréquence centrale et } Q : \text{Facteur de qualité}$$

A1.5

$$H_1 dB = 20 \log |H_1(j\omega)| = 20 \log H_{1\max} - 10 \log \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

- Pour $\omega \ll \omega_0$

$$H_1 dB \approx 20 \log \omega + 20 \log \left(\frac{A}{\omega_0^2} \right); \quad \text{pente} = 20 \text{dB/décade}$$

- Pour $\omega = \omega_0$

$$H_1 dB = 20 \log H_{1\max}$$

- Pour $\omega \gg \omega_0$

$$H_1 dB \approx -20 \log \omega + 20 \log A; \quad \text{pente} = -20 \text{dB/décade}$$

Les coordonnées de point d'intersection :

$$20 \log \omega_{\text{int}} + 20 \log \left(\frac{A}{\omega_0^2} \right) = -20 \log \omega_{\text{int}} + 20 \log A \quad \text{d'où} \quad \omega_{\text{int}} = \omega_0$$

A1.6

$$H_1(j\omega) = \frac{A \left[\frac{\omega_0}{Q} + j \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right) \right]}{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)^2}$$

$$\phi_i = \arctg \left[\frac{\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega}{\frac{\omega_0}{Q}} \right] = \arctg \left[\frac{Q}{\omega_0} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right) \right] = \arctg \left[Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]$$

- Pour $\omega \ll \omega_0$ $\phi_i \approx \arctg \left(Q \frac{\omega_0}{\omega} \right); \quad \phi_i \Rightarrow \frac{\pi}{2}$
- Pour $\omega \gg \omega_0$ $\phi_i \approx -\arctg \left(Q \frac{\omega}{\omega_0} \right); \quad \phi_i \Rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- Pour $\omega = \omega_0$ $\phi_i \approx +\arctg(0); \quad \phi_i \Rightarrow 0$

$$\text{A1.7} \quad R_1 = 1,8k\Omega, \quad R_2 = 5k\Omega, \quad C_1 = 10nF, \quad C2 = 100nF$$

$$A = 55555s^{-1}; \quad Q = 0,136; \quad f_0 = 1,68KHz; \quad f_H = 12,57KHz$$

$$f_B = 224Hz; \quad H_{1\max} = 0,717(-2,9dB); \quad H_{\text{intersection}} = +14,4dB$$

A1.8 voir courbe

A2- Cellule de filtrage actif

A2.1 ---

A2.2

$$H_2(p) = \frac{k}{1 + [(R_2 + R_1)C_1 + R_1C_2(1-k)]p + R_1R_2C_1C_2p^2} = \frac{\frac{k}{R_1R_2C_1C_2}}{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} + \frac{(R_2 + R_1)C_1 + R_1C_2(1-k)}{R_1R_2C_1C_2}p + p^2}$$

C'est un filtre passe bas d'ordre 2

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}; \quad A = \frac{k}{R_1R_2C_1C_2}; \quad ; \quad Q = \frac{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}{(R_2 + R_1)C_1 + R_1C_2(1-k)}$$

A2.3

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \quad A = \frac{k}{R^2C^2}; \quad ; \quad Q = \frac{1}{3-k}$$

A2.4

$$H_2(j\omega) = \frac{A}{\omega_0^2 + \frac{\omega_0}{Q}j\omega + (j\omega)^2} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} \quad ; \quad |H_2(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$\phi_2 = -\arctg \frac{\omega \cdot \omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$H_{02} = |H_2(\omega = 0)| = \frac{A}{\omega_0^2}$$

A2.5

$$H_2(j\omega) = \frac{H_{02}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0Q}}$$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{H_{02}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2Q^2}}}$$

$|H_2(j\omega)|$ est Max. quand le dénominateur est Min. (dérivé nulle)

$$\frac{d}{d\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2Q^2} \right] = 0$$

$$-2Q^2 \left(1 - \frac{\omega_{MAX}^2}{\omega_0^2}\right) \frac{2\omega_{MAX}}{\omega_0^2} + \frac{2\omega_{MAX}}{\omega_0^2} = 0$$

$$\omega_{MAX} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$|H_{2MAX}| = |H_2(j\omega)|_{\omega=\omega_{MAX}} \frac{\frac{H_{02}Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Le maximum existe quand ω_{MAX} est positive $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$

A2.6 fréquence de coupure ω_c

$$|H_2(j\omega_c)| = \frac{H_{02}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2 Q^2}}} = \frac{H_{02}}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right)^2 + 1}}$$

A2.7

$$|H_{2dB}| = 20 \log \frac{H_{02}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}} = 20 \log H_{02} - 10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2} \right]$$

$$\omega \gg \omega_0; \quad H_{2dB} \approx 20 \log H_{02} - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \rightarrow \text{pente } -40 \text{dB/décade}$$

A2.8

AN1 : $H_{02} = 1,15(1,2dB)$; $Q = 0,54$; $f_0 = 3,3kHz$; $f_c = 2,43kHz$ pas de Max. car $Q < 0,707$

AN2 : $f_{MAX} = 2,8kHz$; $H_{2MAX} = 3,08(9,8dB)$ $H_{02} = 2,22(6,9dB)$; $Q = 1,28$; $f_0 = 3,39kHz$; $f_c = 4,7kHz$

B - Génération des signaux sinusoïdaux

B1. Décomposant en série de Fourier $X(t)$

$$X(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n \frac{2\pi}{T_0} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T_0} t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} X(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} dt = \frac{E}{T_0} [t]_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{E}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} X(t) \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt = \frac{2E}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt = \frac{2E}{T_0} \frac{T_0}{2n\pi} \left[\sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) \right]_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{E}{n\pi} [\sin(n\pi) - \sin(0)] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} X(t) \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt = \frac{2E}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt = \frac{2E}{T_0} \frac{T_0}{2n\pi} \left[-\cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} t\right) \right]_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{E}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 1]
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ pair} & b_n = 0 \\ \text{si } n \text{ impair} & b_n = \frac{2E}{n\pi} \end{cases}$$

$$X(t) = \frac{E}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2E}{(2k-1)\pi} \sin\left((2k-1) \frac{2\pi}{T_0} t\right) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

$$X(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{2E}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{2E}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots \quad \text{avec } \omega_0 = 2\pi/T_0$$

B2. Définition des différents blocs :

- **Bloc 1 (PA à PB)** : Il s'agit d'un filtre passif de type passe-bande du premier ordre, obtenu par la succession d'un passe-haut (liaison capacitive) et d'un passe-bas RC. Il élimine les très basses fréquences et atténue progressivement les hautes fréquences. Sa pente asymptotique est de 20 dB/décade aussi bien en basses qu'en hautes fréquences.

Bloc 2 (PB à PC) et Bloc 3 (PC à PD) : Ce sont deux filtres passe-bas actifs du second ordre, de structure Sallen-Key, présentant respectivement un gain statique de 1.15 et de 2.22. Chacun d'eux assure, en domaine haute fréquence, une atténuation de 40 dB/décade.

L'ensemble formé par les trois blocs se comporte, en basses fréquences, comme un filtre du premier ordre supprimant la composante continue, et, en hautes fréquences, comme un filtre global d'ordre cinq, offrant une pente d'atténuation de -100 dB/décade.

B3. Atténuation en fréquence de dB à 2kHz

Fréquence f	Gain du bloc 1	Gain du bloc 2	Gain du bloc 3
2 kHz (Fond.)	-2,90 dB	-1,00 dB	+8,94 dB
6 kHz (H3)	-3,69 dB	-18,0 dB	+0,86 dB
10 kHz (H5)	-5,01 dB	-26,5 dB	-10,6 dB

B4. Amplitudes du fondamental et de deux harmoniques suivants.

Fréquence f	Ampl. en PA	Ampl. en PB	Ampl. en PC	Ampl. en PD
2 kHz (Fond.)	3.183	2.279 V	2.030 V	5.682 V
6 kHz (H3)	1.061	0.694 V	0.087 V	0.096 V
10 kHz (H)	0.637	0.358 V	0.017 V	0.005 V

B5. Allures aux point PA, PB et PD.

En PA : Un signal carré riche en harmonique.

En PB : La composante continue est totalement éliminée, cependant la fondamentale demeure prédominante dans le spectre, bien que les harmoniques subsistent encore de manière perceptible. L'onde résultante présente ainsi une allure globalement carrée, mais ses bords, apparaissent visiblement arrondis en raison de l'atténuation progressive des composantes hautes fréquences.

En PD : L'amplitude de la fondamentale est largement supérieure à celle du 1^{er} harmonique (0.096V). La forme d'onde à la sorte est sinusoïdale pure (très peu déformée) à la fréquence à 2 kHz, avec une amplitude maximale de 5.682V.

B6. Taux de distorsion d'harmonique "THD"

Les amplitudes en PD du 1^{er} et du 3^{ème} sont $V_{D1max} = 5.682V$ et $V_{D3max} = 0.096V$

Les valeurs efficaces correspondant sont :

$$V_{D1} = \frac{V_{D1max}}{\sqrt{2}} = 4.02V, \quad V_{D3} = \frac{V_{D3max}}{\sqrt{2}} = 0.0679V$$

D'où

$$THD = \frac{V_{D3}}{\sqrt{V_{D1}^2 + V_{D3}^2}} = \frac{0.0679}{\sqrt{(4.02)^2 + (0.0679)^2}} = 1.7\%$$

C – Echantillonnage

C1 – Echantillonnage idéal

C1.1 - $S_{1e}(t)$?

$$S_{1e}(t) = S_1(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_1(t) \delta(t - nT_e)$$

C1.2. $S_{1e}(f)$?

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_e t}$$

En appliquant la propriété de décalage

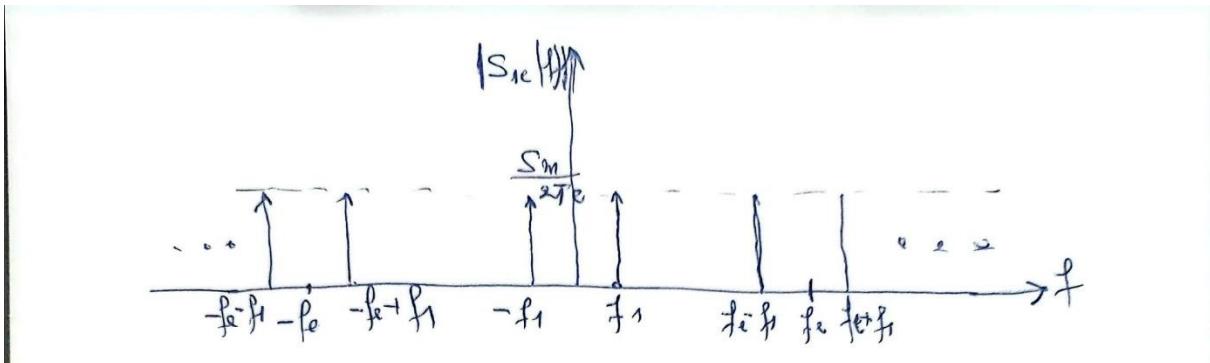
$$S_{1e}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_1(f - nf_e)$$

Pour $S_1(t) = S_m \cos(2\pi f_1 t) \rightarrow S_1(f) = \frac{S_m}{2} \delta(f - f_1) + \frac{S_m}{2} \delta(f + f_1)$

$$S_{1e}(f) = \frac{S_m}{2T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f \pm f_1 - nf_e)$$

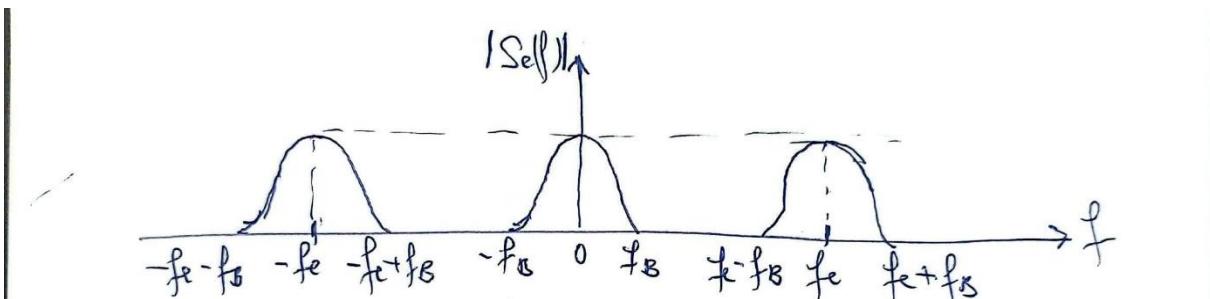
De même pour le signal $S_2(t)$,

$$S_{2e}(f) = \frac{S_m}{2T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f \pm f_2 - nf_e)$$



C1.3 Pour un signal déterministe quelconque

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e)$$



Pour qu'il n'aurait pas de chevauchement, il faut respecter le théorème de Shannon $f_e \geq 2f_B$.

C2 – Echantillonnage réel

C3.1. les valeurs des échantillons doivent se maintenir constante pendant (une durée θ) la durée de conversion du signal analogique en équivalent numérique. La durée θ , doit être supérieur au temps de conversion du CAN.

C3.2.

$$\begin{aligned}
S_e(t) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(t) \delta(t - nT_e) \right) * P_\theta \left(t - \frac{\theta}{2} \right) \\
S_e(f) &= \left(\frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e) \right) \cdot TF \left[P_\theta \left(t - \frac{\theta}{2} \right) \right] \\
TF[P_\theta(t)] &= \theta \cdot \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f}
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de décalage temporel

$$x(t - t_0) \rightleftharpoons X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

D'où

$$TF \left[P_\theta \left(t - \frac{\theta}{2} \right) \right] = \theta \cdot \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} e^{-j2\pi f \frac{\theta}{2}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_e(f) &= \left(\frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e) \right) \cdot \frac{\theta \sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} e^{-j2\pi f \frac{\theta}{2}} \\
S_e(f) &= \left(\frac{\theta}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e) \right) \cdot \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} e^{-j\pi f \theta}
\end{aligned}$$

Le module

$$|S_e(f)| = \frac{\theta}{T_e} \left| \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \right| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e)$$

C2.3. Spectres de $S_1(t)$ et $S_2(t)$

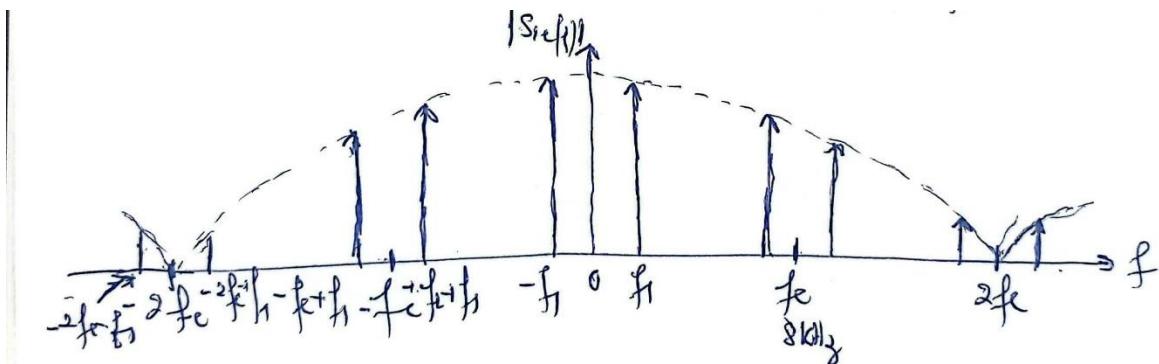
$$|S_e(f)| = \frac{1}{2} \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{f}{2f_e} \right)}{\pi \frac{f}{2f_e}} \right| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e)$$

Pour un signal sinusoïdal $S_1(t) = S_m \cos(2\pi f_1 t)$ et $S_2(t) = S_m \cos(2\pi f_2 t)$

$$|S_{1e}(f)| = \frac{S_m}{4} \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{f}{2f_e} \right)}{\pi \frac{f}{2f_e}} \right| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f \pm f_1 - nf_e)$$

et

$$|S_{2e}(f)| = \frac{S_m}{4} \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{f}{2f_e} \right)}{\pi \frac{f}{2f_e}} \right| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f \pm f_2 - nf_e)$$



C2.4. la meilleure atténuation des fréquences supérieures à la fondamentale est obtenue pour $\theta = T_e$.

C2.5. Echantillonneur-bloqueur

C2.5a. quand le transistor T conduit, le condensateur se charge à travers R_{ON} avec une constante de temps $\theta_1 = R_{ON} \cdot C$. Par contre, quand il est bloqué, il se décharge avec une constante $\theta_2 = R_{OFF} \cdot C$. On note que $\theta_2 = 10^8 \theta_1$.

Le premier montage suiveur a pour rôle de présenter une faible impédance de sortie pour garantir une charge rapide du condensateur, et ce, indépendamment de l'impédance de la source de signal. Le second suiveur présente une impédance d'entrée élevée afin de minimiser le courant de fuite du condensateur pendant la phase de maintien (blocage).

C2.5b.

$T_e = 125\mu s$, $\tau = 0.1 \cdot T_e = 12.5\mu s$, $\theta_1 = R_{ON} \cdot C = 100 \cdot 470 \cdot 10^{-12} = 47ns$, le temps de charge complet est généralement évalué à $3\tau = 141ns \ll \tau$.

$\theta_2 = R_{OFF} \cdot C = 10^8 \theta_1 = 4.7s$ à la décharge.

Lorsque le commutateur T est fermé, le condensateur se charge très rapidement et atteint la valeur instantanée de la tension d'entrée. Lorsque T s'ouvre, le condensateur conserve la valeur acquise au moment de l'échantillonnage, car sa constante de temps de décharge est très élevée. Ce fonctionnement constitue le principe de l'échantillonneur-bloqueur : le circuit préleve une valeur instantanée de la tension d'entrée et la maintient inchangée pendant toute la durée de la phase de conversion réalisée par le CAN.

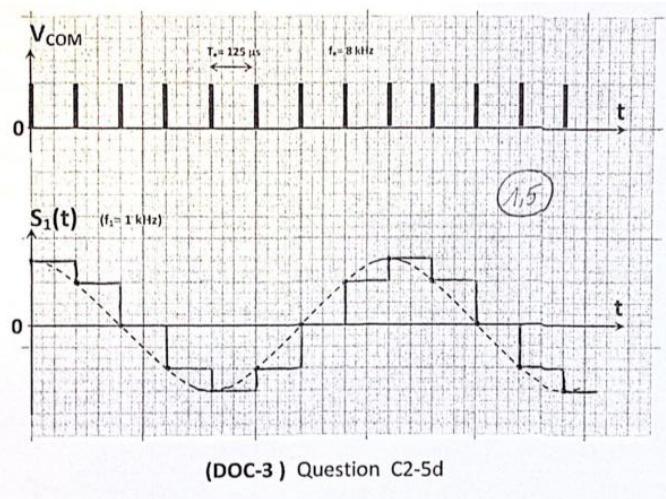
C2.5c.

$\Delta V = S(t) - V_c$. En considérant que la tension $S(t)$ reste constante (égale à $S(kT_e)$) pendant une durée τ très faible, d'où :

$$\frac{\Delta V}{S(kT_e)} = \frac{S(kT_e) - S(kT_e) \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\theta_1}}\right)}{S(kT_e)} \leq 1\% \Rightarrow e^{-\frac{\tau}{\theta_1}} \leq 1\%$$

$\tau \geq 2\theta_1 \ln(10) = 0.216\mu s$, cette condition est bien remplie puisque $\tau = 12.5\mu s$.

C1.5d.



D – CAN

D1 – Théorie

Quantification par excès

$$S_n \cdot q < S_e(t) \leq (S_n + 1) \cdot q \text{ alors } S_q(t) = (S_n + 1) \cdot q$$

D1.1. Pas de quantification

$$q = \frac{2S_m}{2^n} = \frac{S_m}{2^{n-1}} = \frac{5}{64} = 78.125 \text{ mV}$$

D1.2. Pour une plage d'entrée de $\pm 400 \text{ mV}$, le nombre de pas $N_{pas} = \frac{800}{78.125} = 10.24$. Soit 5 pas de chaque coté

$$0 \cdot q < S_e(t) \leq (0 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (0 + 1) \cdot q = 78.125 \text{ mV}$$

$$1 \cdot q < S_e(t) \leq (1 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (1 + 1) \cdot q = 156.25 \text{ mV}$$

$$2 \cdot q < S_e(t) \leq (2 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (2 + 1) \cdot q = 234.375 \text{ mV}$$

$$3 \cdot q < S_e(t) \leq (3 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (3 + 1) \cdot q = 312.5 \text{ mV}$$

$$4 \cdot q < S_e(t) \leq (4 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (4 + 1) \cdot q = 390.625 \text{ mV}$$

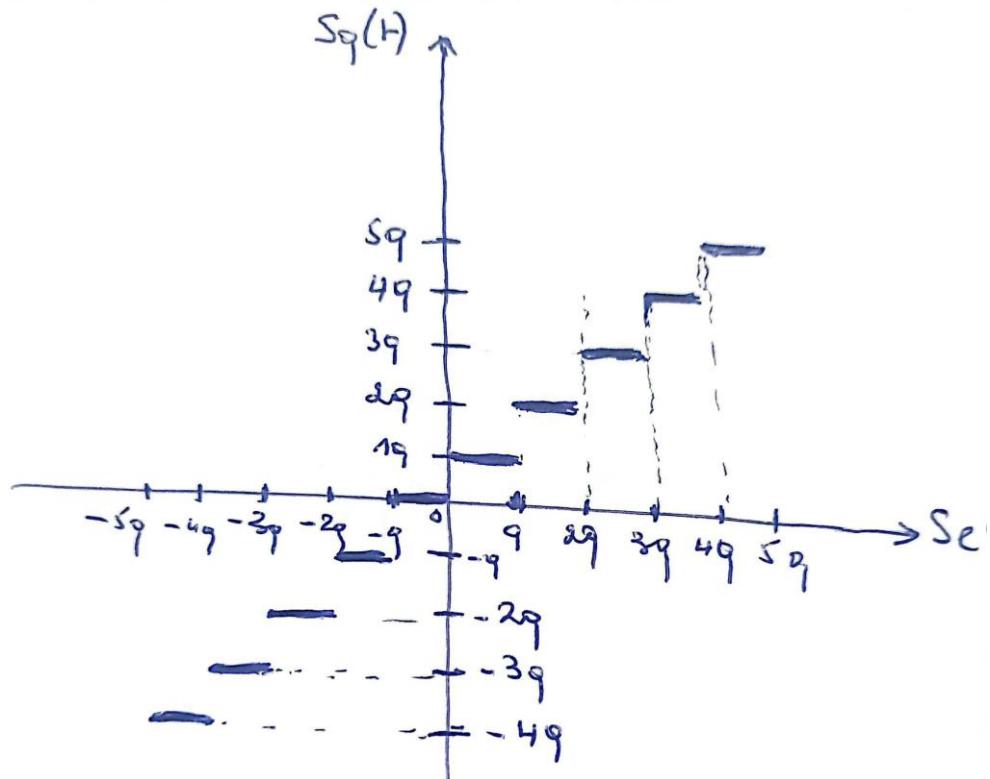
$$-1 \cdot q < S_e(t) \leq (-1 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (-1 + 1) \cdot q = 0 \text{ mV}$$

$$-2 \cdot q < S_e(t) \leq (-2 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (-2 + 1) \cdot q = -78.125 \text{ mV}$$

$$-3 \cdot q < S_e(t) \leq (-3 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (-3 + 1) \cdot q = -156.25 \text{ mV}$$

$$-4 \cdot q < S_e(t) \leq (-4 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (-4 + 1) \cdot q = -234.375 \text{ mV}$$

$$-5 \cdot q < S_e(t) \leq (-5 + 1) \cdot q \rightarrow S_q(t) = (-5 + 1) \cdot q = -312.5 \text{ mV}$$



D1.3.

$$S_1(t) = S_m \cos(2\pi f_1 t), \quad S_m = 4V, \quad f_1 = 1kHz, \quad f_e = 8kHz \rightarrow T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{T}{8}$$

Le premier échantillon commence à l'instant $\frac{T}{5}$, les échantillons seront relevés aux instants :

$$t = \frac{T}{5} + kT_e = \frac{T}{5} + \frac{kT}{8} = \left(\frac{8+5k}{40}\right)T, \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$S_e(t) = 4 \cos\left(2\pi f_1 \frac{8+5k}{40} T\right) = 4 \cos\left(2\pi \frac{8+5k}{40}\right)$$

$$S_n = \left\lceil \frac{S_e(t)}{q} \right\rceil$$

$$N_{\text{décimal}} = S_n + 64$$

$$S_q(t) = (S_n + 1)q$$

N° échant.	$t(\text{ms})$	$S_e(t) (\text{V})$	S_n	$N_{\text{décimal}}$	N_{binnaire}	$S_q(t) (\text{V})$	$\epsilon(t) = S_e(t) - S_q(t)$
1	0.2	+1.236	15	79	1001111	+1.250	-14 mV
2	0.325	-1.816	-24	40	0101000	-1.797	-19 mV
3	0.45	-3.804	-49	15	0001111	-3.750	-54 mV
4	0.575	-3.564	-46	18	0010010	-3.516	-48 mV
5	0.7	-1.236	16	48	0110000	-1.172	-64 mV
6	0.825	+1.816	23	87	1010111	+1.875	-59 mV
7	0.95	+3.804	48	112	1110000	+3.825	-24 mV
8	1.075	+3.564	45	109	1101101	+3.594	-30 mV

D1.4a. Densité de probabilité

Pour une loi uniforme sur, la densité de probabilité vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\epsilon) d\epsilon = 1$$

$p(\epsilon)$ est constante sur l'intervalle $[0, q]$

$$\int_0^q C d\epsilon = 1 \Rightarrow C \cdot q = 1$$

D'où

$$C = \frac{1}{q}$$

$$p(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pour } 0 \leq \epsilon \leq q \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

D1.4b. Valeur moyenne et efficace de l'erreur de quantification.

Valeur moyenne

$$\epsilon_{moy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon \cdot p(\epsilon) d\epsilon = \int_0^q \epsilon \cdot \frac{1}{q} d\epsilon = \frac{q}{2}$$

Valeur efficace

$$\epsilon_{eff}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^2 \cdot p(\epsilon) d\epsilon = \int_0^q \epsilon^2 \cdot \frac{1}{q} d\epsilon = \frac{1}{q} \left[\frac{\epsilon^3}{3} \right]_0^q = \frac{q^2}{3}$$

D'où

$$\epsilon_{eff} = \frac{q}{\sqrt{3}}$$

D1.4c. Puissance de bruit de quantification.

La puissance du bruit P_B est la valeur quadratique moyenne du signal de bruit

$$P_B = \overline{\epsilon^2} = \epsilon_{eff}^2 = \frac{q^2}{3}$$

D1.4c. Puissance d'un signal d'entrée sinusoïdal.

$$\begin{aligned} P_S = \overline{\epsilon^2(t)} &= \frac{1}{T} \int_0^T S_m^2 \cdot \cos^2(2\pi ft) dt = \int_0^T (1 + \cos(4\pi ft)) dt = \frac{S_m^2}{2T} \left[t - \frac{\sin(4\pi ft)}{4\pi f} \right]_0^T \\ &= \frac{S_m^2}{2} \end{aligned}$$

D1.4d. Puissance d'un signal d'entrée sinusoïdal.

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = \frac{P_S}{P_B} = \frac{S_m^2/2}{q^2/3} = \frac{3}{2} \frac{S_m^2}{q^2}$$

Or

$$q = \frac{S_m}{2^{n-1}} \Rightarrow q^2 = \frac{S_m^2}{2^{2n-2}} = \frac{S_m^2}{2^{-2} \cdot 2^{2n}} = \frac{4S_m^2}{2^{2n}}$$

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{max} = \frac{3}{2} \frac{S_m^2}{q^2} = \frac{3}{2} \frac{S_m^2}{\frac{4S_m^2}{2^{2n}}} = \frac{3}{8} 2^{2n}$$

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{dB} = 20 \log \left(\frac{3}{8} 2^{2n} \right) = 6.02n - 4.26$$

Si le nombre de bit augmente d'une unité

$$\left(\frac{S}{B}\right)'_{dB} = 6.02(n+1) - 4.26 = 6.02n - 4.26 + 6.02 = \left(\frac{S}{B}\right)_{dB} + 6.02$$

A chaque fois que le nombre de bit augmente d'une unité, le rapport signal sur bruit est amélioré de 6 dB.

D2. Réalisation du CAN

D2.1. Réalisation du CNA

D2.1.1 Calcul du courant

$$I_0 = \frac{V_0}{2R}, \quad I_1 = \frac{V_1}{2R}, \quad I_2 = \frac{V_2}{2R}, \dots$$

$$I_i = \frac{V_i}{2R} \text{ pour } i = 0, 1, \dots, 6 \quad \text{avec } V_6 = V_{ref}$$

En appliquant le pont diviseur des tensions :

$$V_0 = \frac{V_1}{2}, \quad V_1 = \frac{V_2}{2}, \quad V_2 = \frac{V_3}{2}, \dots V_5 = \frac{V_{ref}}{2}, V_6 = V_{ref}$$

Ceci nous donne

$$V_6 = V_{ref}, V_5 = \frac{V_{ref}}{2}, V_4 = \frac{V_{ref}}{4}, V_3 = \frac{V_{ref}}{8}, V_2 = \frac{V_{ref}}{16}, V_1 = \frac{V_3}{32}, V_0 = \frac{V_{ref}}{64}$$

$$V_i = \frac{V_{ref}}{2^{6-i}} \text{ pour } i = 0, 1, \dots, 6$$

En remplaçant V_i dans l'expression des courants I_i

$$I_i = \frac{V_i}{2R} = \frac{V_{ref}}{2R2^{6-i}} = \frac{2^i V_{ref}}{2R2^6} \text{ pour } i = 0, 1, \dots, 6$$

D'où

$$I_6 = \frac{V_{ref}}{2R}, I_5 = \frac{V_{ref}}{4R}, I_4 = \frac{V_{ref}}{8R}, \dots, I_0 = \frac{V_{ref}}{128R}$$

Nous remarquons que les courants I_i sont constant, indépendamment de position des interrupteurs électroniques.

Le courant I_{F1} est la somme des courants dont la valeur de $b_i = 1$

$$I_{F1} = \sum_{i=0}^6 \frac{2^i V_{ref}}{2R 2^6} b_i = \frac{V_{ref}}{2R 2^6} \sum_{i=0}^6 2^i b_i = \frac{V_{ref}}{2R 2^6} N \text{ avec } N = \sum_{i=0}^6 2^i b_i$$

D2.1.2 Tension de sortie V_X

$$V_X = -R_F I_F = -R_F (I_{F1} + I_{F2}) \text{ avec } I_{F2} = -\frac{V_{ref}}{2R}$$

$$V_X = -\frac{R_F V_{ref}}{2R 2^6} N + \frac{R_F V_{ref}}{2R} = -\frac{R_F V_{ref}}{2R} \left(\frac{N - 2^6}{2^6} \right)$$

D2.1.3 Pas de quantification, $V_{X(\min)}$ et $V_{X(\max)}$

Le pas de quantification correspond à la différence entre deux valeurs consécutives.

$$q = V_{X1} - V_{x0} = -\frac{R_F V_{ref}}{2R 2^6}$$

$V_{X(\min)}$ pour $N = 0$

$V_{X(\max)}$ pour $N = 2^7 - 1 = 127$

$$V_{X(\max)} = -\frac{R_F V_{ref}}{2R} \left(\frac{127 - 2^6}{2^6} \right) = \frac{R_F V_{ref}}{2R} \left(1 - \frac{127}{64} \right)$$

D2.1.4 Application numérique $R_F = 2R, V_{ref} = -5V$

$$V_X = 5 \left(\frac{N - 2^6}{2^6} \right) = 5 \left(\frac{N}{2^6} - 1 \right)$$

$$q = \frac{5}{2^6} = 78,125mV$$

$$V_{X(\min)} = -5V$$

$$V_{X(\max)} = 5 \left(\frac{127}{64} - 1 \right) = 4,921V$$

Pour $N = (1000000)_2 = 2^6 = 64$

$$V_{X(64)} = 5 \left(\frac{2^6 - 2^6}{2^6} \right) = 0V$$

Conclusion : Il s'agit d'un CNA bipolaire dont la tension de sortie varie dans l'intervalle $[-S_m, S_m - q]$, conformément à la relation $V_X = 0.078125 \cdot N - 5$ avec N de 0 à 127.

D2.2 Réalisation d'un CAN à approximation successives

D2.2.1

Table de vérité d'une bascule JK

CLK	J	K	Q _n
↑	0	0	Q_{n-1} : Mémorisation
↑	0	1	0 : déclenchement
↑	1	0	1 : enclenchement
↑	1	1	$\overline{Q_{n-1}}$: basculement

Le registre à décalage permet de transférer, à chaque front d'horloge, l'impulsion START appliquée à son entrée, en la faisant progresser de gauche à droite, c'est-à-dire de la cellule A vers la cellule H.

D2.2.2 Fonctionnement du CAN

Initialement, toutes les sorties du registre à décalage ainsi que celles des bascules JK sont à zéro. Il faut remarquer que les entrées K de toutes les bascules JK sont reliées à la masse. Par conséquent, la remise à zéro d'une bascule ne peut s'effectuer que de manière asynchrone par l'intermédiaire de l'entrée RAZ, celle-ci est commandée par la combinaison de la sortie correspondante du registre à décalage et de la sortie du comparateur.

1. Au premier front montant de l'horloge, l'impulsion START charge un « 1 » dans la première cellule (sortie A) du registre à décalage. Ainsi, la première bascule JK voit son entrée J activée.
2. Au front descendant suivant, seule la sortie de la bascule correspondant à la sortie A passe à l'état haut.
3. Le CNA convertit alors la valeur binaire « 10000000 », qui correspond à la moitié de la pleine échelle, puisque seul le bit de poids fort est à 1. Le CNA produit donc une tension $V_X = (V_{ref+} - V_{ref-}) / 2$, appliquée à l'entrée du comparateur pour être comparée à la tension d'entrée $S_q(t)$.
4. Le comparateur détermine la validité du bit testé. Deux cas peuvent se présenter :
 - Si $V_X > S_q(t)$ ($C_p = 1$), cela signifie que la tension produite est trop élevée. Dans ce cas, la sortie du comparateur active la remise à zéro, et la bascule concernée est immédiatement forcée à 0 via l'entrée RAZ.
 - si $V_X \leq S_q(t)$ ($C_p = 0$), la sortie du comparateur reste à zéro, aucune remise à zéro n'est déclenchée et la bascule conserve donc l'état haut obtenu précédemment. Dans ce cas, le bit de poids fort est validé et maintenu à 1.
5. Au front d'horloge suivant, le registre à décalage avance d'un cran et déplace le « 1 » vers la sortie B. La deuxième bascule JK devient alors celle en cours de test, et le même processus s'applique au bit suivant.

6. Pour chacun des bits, du plus significatif au moins significatif, le CNA génère la tension correspondant au mot binaire temporaire, puis le comparateur valide ou invalide le bit testé en fonction du signe de l'erreur, ce qui permet une approximation successive de plus en plus précise de la tension d'entrée.

7. Une fois le dernier bit traité, le signal FDC indique la fin de conversion et le mot binaire final, représentant la valeur échantillonnée, est mémorisé dans le Latch de sortie.

D2.2.3.

Voir doc rep

E – Génération de séquences pseudo-aléatoire

E-1.

Q_D	Q_C	Q_B	Q_A
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0

E-2. Implantation pratique du générateur pseudo-aléatoire

E-2a Equation logique de **X**

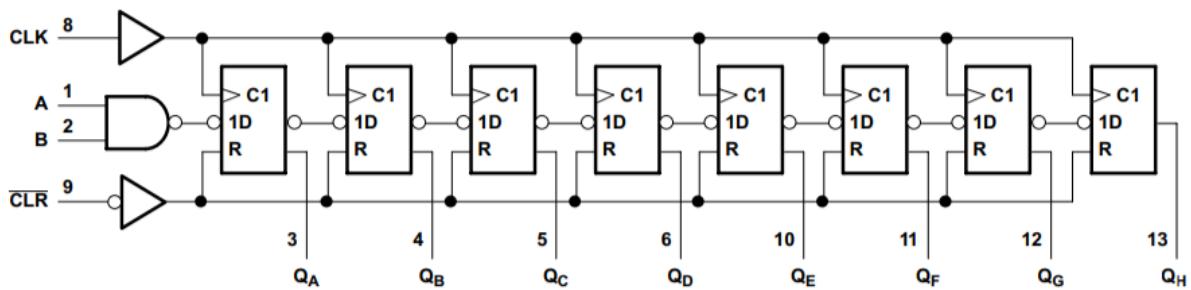
$$X = \overline{(Q_D + Q_C) + (Q_B + Q_A)} = \overline{Q_D} \cdot \overline{Q_C} \cdot \overline{Q_B} \cdot \overline{Q_A}$$

E-2b Equation logique de **A**

$$A = Q_D \oplus Q_C + X$$

Si au moins une sortie du registre à décalage à l'état haut, la sortie **X** devient égale à 0 et par suite $A = Q_D \oplus Q_C$.

E-2c



D'après le schéma interne, le 74HC164 est un registre à décalage, dont seulement quatre bascules sont utilisées dans cette application. L'entrée **A** correspond à l'entrée de la première bascule, et elle est commandée par les sorties Q_D et Q_C à travers une porte OU exclusif, conformément à la figure 14. La sortie **X** n'intervient que pour imposer à l'entrée **A** un niveau logique 1 lorsque toutes les sorties Q_D à Q_A du registre sont à zéro.

E-2d Lorsque l'entrée \overline{CLR} est activée à l'état bas, toutes les sorties du registre sont immédiatement remises à zéro. Dans cette situation, c'est la seule combinaison logique qui place \mathbf{X} à l'état haut, ce qui impose à l'entrée \mathbf{A} la valeur logique 1.

E-2e Les portes U1, U2 et U3 imposent un état logique 1 à l'entrée du registre à décalage lorsque toutes les sorties sont à zéro. Ce mécanisme empêche le registre de rester bloqué en état nul et garantit ainsi la poursuite normale du fonctionnement du circuit.